ſſe,
leme
piele

Unterhaltende Probleme und Spiele

in

mathematischer Beleuchtung.

Zusammengestellt

von

Dr. W. Grosse,
Mitglied der Kais. Leop.-Karol. Deutschen Akademie.

Mit zahlreichen Figuren und 1 Tafel.

Leipzig
Verlagsbuchhandlung von Quandt & Händel.
1897.

Vorwort.

Ein von mir im naturwissenschaftlichen Verein zu Bremen im vorigen Winter gehaltener Vortrag war die Veranlassung, daß die Herren Verleger dieses Buches mit der Aufforderung an mich herantraten, den von mir behandelten Stoff zu erweitern und in Buchform zugänglich zu machen. Diesem Wunsche bin ich gern nachgekommen, obgleich ich mir der Schwierigkeit wohl bewußt war, den oft recht starren Stoff in knapper und doch zugleich leicht verständlicher Weise zur Darstellung zu bringen. Wenn ich bisweilen im Unterricht an passender Stelle dieses oder jenes der behandelten Kapitel den Schülern vorführte, so fand es Verständniß und Interesse. Freilich wirkt das gesprochene Wort eindringlicher und klarer, als das gelesene, zumal in Dingen der Zahl- und Raumgrößen. Ich hoffe aber, daß es mir gelungen ist, den spröden Stoff in eine gebildeten Laien verständliche Form gebracht zu haben. Inhaltlich wird auch den Fachmathematikern Manches geboten, was in unserer Literatur bisher fehlte. Es sind von mir benutzt worden in erster Linie das vierbändige Werk von Ed. Lucas (Récréations mathématiques); dann das Buch von Scheffler über „Magische Quadrate" (Leipzig, B. G. Teubner) und die in der „Naturwissenschaftlichen Wochenschrift" (Berlin, Ferd. Dümmler) vor Jahren erschienenen Aufsätze von H. Schubert, die ich besonders bei den letzten drei kleinen Abschnitten benutzt habe. Außerdem fand ich in englischen und französischen Zeitschriften, sowie in einer Reihe älterer Werke Manches, was hier im Laufe der Darstellung seinen Platz gefunden hat. Ich habe nicht unterlassen,

jedesmal die Quellen anzugeben. Die Figuren sind von mir zum großen Teil unter Benutzung der Originale neu gezeichnet. Diejenigen des neunten Abschnittes sind besonders deshalb aufgenommen, um daran einige Fehler der bei Lucas sich vorfindenden Berechnung nachzuweisen; auch einige Spielpläne aus diesem ausführlichen Werke habe ich aufgenommen, während ich andere selbst aufgestellt habe. Jedem, der tiefer in den Stoff eindringen will, kann das Studium des Lucas'schen Werkes (Verlag von Gauthier-Villars, Paris) dringend empfohlen worden. Ich war in meiner Darstellung von vornherein an einen bestimmten kleinen Umfang gebunden. Die Gliederung des Stoffes ist in neunzehn Kapiteln derartig vorgenommen, daß inhaltlich Verwandtes auf einander folgt. Die Probleme finden sich in der ersten, die Spiele in der zweiten Hälfte. Möge das kleine Werk dazu beitragen, in Deutschland auch außerhalb des Schulzwanges und Berufes mathematisches Denken zu fördern.

Bremen, November 1897.

W. Grosse.

Inhaltsübersicht.

Unterhaltende Probleme und Spiele.

1.

Probleme und Uebungen aus der reinen Mathematik.

Unsre natürliche Zahlenreihe, in deren Mitte die Null steht und die sich nach beiden Seiten in das Unendliche so erstreckt, daß auf der einen Seite die positiven (+), auf der andern die negativen (—) Zahlgrößen sich befinden, hat die Eigenschaft, daß jedes folgende Glied das vorhergehende um eine Einheit übertrifft. Die Ziffern Eins bis Neun bilden die neun ersten Glieder zu beiden Seiten der Null: alle übrigen Zahlen werden aus der Null und diesen Ziffern zusammengesetzt. Sie erhalten dann ihren Wert durch die Stellung, indem — von rechts nach links gerechnet — jede Ziffer an zweiter Stelle Zehner, an dritter Hunderte u. s. f. darstellt. Setzt man hinter die Einer ein Komma, so hat man hinter dem Komma der Reihe nach Zehntel, Hundertel u. s. f. Vollständige Symmetrie, wie in der natürlichen Zahlenreihe, würde bei dieser Schreibweise vorhanden sein, wenn sich das Komma nicht hinter den Einern, sondern über oder unter denselben befinden würde. Bei den folgenden Zerlegungen, welche zur Erläuterung dienen sollen, ist jedoch die in der Mathematik übliche Schreibweise beibehalten:

$$36875,672$$

$$= 30000 + 6000 + 800 + 70 + 5 + \frac{6}{10} + \frac{7}{100} + \frac{2}{1000}$$

$$= 3 \times 10^4 + 6 \times 10^3 + 8 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 5 \times 10^0 + 6 \times 10^{-1} + 7 \times 10^{-2} + 2 \times 10^{-3}$$

Dieses von den meisten Kulturvölkern eingeführte Dezimalsystem ist sehr alt und schon Aristoteles, der Lehrer des großen Alexander, hat die Ansicht ausgesprochen, daß wohl die Zehnzahl unserer Finger die Veranlassung zur Wahl der Grundzahl gegeben habe. Die Ba-

bylonier freilich haben die Zahl „sechzig" zur Grundzahl gemacht, die von ihnen auch in einem Bruchsystem angewendet wurde. Dieses hochentwickelte Kulturvolk beschäftigte sich viel mit Astronomie und da man ein Jahr zu 360 Tagen rechnete, so lag es nahe, den Kreis der Erdbahn, die Ekliptik in 360 Grade zu teilen. An jedem Tage durchlief nach ihrer Anschauung die Sonne einen Grad dieses Kreises. Aus der Beschäftigung mit der Mathematik aber wußten sie, daß der Halbmesser sich sechsmal als Sehne in den Kreis legen lasse, und so erhielten sie Sechstelkreise zu je 60 Grad. Die Eigenschaft der Zahl 60, durch 2, 3, 4, 5, 10, 12, 15, 20, 30 teilbar zu sein, war nun wohl der Grund, sie als Einheit für die weitere Teilung zu gebrauchen und so erhielt der Grad 60 Minuten, die Minute 60 Sekunden. Die Nenner der Brüche in diesem Sexagesimalsystem (60, 3600, ...) wurden nicht hingeschrieben, sondern nur die Zähler von den vorhergehenden, höheren Einheiten durch Punkte getrennt. Da diese Schreibweise eine nicht zu verkennende Aehnlichkeit mit derjenigen hat, welche heute üblich ist, so ist es wunderbar genug, daß die Erfindung der Dezimalbrüche erst in das Ende des sechszehnten Jahrhunderts fällt, wo der Holländer Simon Stevin (aus Brügge) auf die weiteren praktischen Vorteile dieser Rechnungsart hinwies, wenn man Maaße und Gewichte der Grundzahl Zehn entsprechend einteilen würde, wie das ja jetzt fast überall geschehen ist. Ich habe a. a. O.[1]) auseinandergesetzt, daß sich die auffallend späte Einführung der Dezimalbrüche (trotz der bereits vorhandenen Analogie) wohl daraus erkläre, daß stets die Einer als vordere, die höheren Stellen aber als hintere Ziffern bezeichnet wurden. Dieser Umstand verhinderte eben, daß man die vorderste Einheit wieder nach derselben Grundzahl weiter teilte. Nach der Erfindung der Dezimalbrüche hat man, wie es scheint, stets die Ziffer der höchsten Stelle als vordere Zahl bezeichnet. —

Reste eines Duodezimalsystems, — also mit der Grundzahl „Zwölf" findet man noch heutzutage bei vielen Völkern und auch wir haben im Dutzend und im Schock eine Erinnerung daran. Niedere Kulturvölker haben unter Umständen sehr wenige Ziffern zur Verfügung. An anderer Stelle werden wir uns länger mit dem Zahlensystem beschäftigen, welches nur die Null und Eins kennt.

[1]) Abhandlungen des naturwissenschaftl. Vereins, Bremen, Band 24.

Hier wollen wir an einigen Beispielen zeigen, wie mit Zahlen gerechnet werden müßte, die eine andre Grundzahl, als die Zehn hätten. Im System mit der Grundzahl Zwölf ist

$$316,48 = 3 \times 12^2 + 1 \times 12^1 + 6 + 4 \times {}^1/_{12} + 8 \times \frac{1}{144}$$

$$\begin{aligned} &= 432 \\ &\ \ 12 \\ &\ \ \ \ 6\ {}^1/_3 + {}^1/_8 \\ \hline &\ 450\ \ {}^7/_{18} \end{aligned}$$

Hier müßten noch zwei neue Ziffern für 10 und 11 eingeführt werden, erst die 12 würde geschrieben werden, wie unsre Zehn. Im System mit der Grundzahl 8 würde man nur die Zahlen von 0 bis 7 zur Verfügung haben.

Folgende Zahlen dieses Systems sollen addirt werden:

756		$3 \times 8^3 = 512$
307		$7 \times 8^2 = 448$
2456		$6 \times 8 = 48$
24		$7 = 7$
3767	giebt im Dezimalsystem	1015

Die Einer ergeben 23, also $2 \times 8 + 7$, daher 2 im Sinn. Die nächst höheren Stellen geben dann $14 = 1 \times 8 + 6$ (1 im Sinn) und darauf $15 = 1 \times 8 + 7$. Die Summe ist also $3 \times 8^3 + 7 \times 8^2 + 6 \times 8 + 7 = 515 + 448 + 48 + 7 = 1015$ in unserm System. Wollen wir im Duodezimalsystem rechnen, so bedürfen wir noch zweier Grundzahlen, $\delta = 10$ und $\varepsilon = 11$.

Z. B. $7\varepsilon 0023 - 245\delta\varepsilon 5 = 56612\delta = 5 \times 12^5 + 6 \times 12^4 + 6 \times 12^3 + 1 \times 12^2 + 2 \times 12 + 10 = 5 \times 248832 + 6 \times 20736 + 6 \times 1728 + 1 \times 144 + 2 \times 12 + 10 = 1379122.$

Folgende Faktoren aus dem System mit der Grundzahl „sechs“ sollen ausmultiplizirt werden:

$$4532 \times 543 = 4415400 = 4 \times 6^6 + 4 \times 6^5 + 1 \times 6^4 + 5 \times 6^3 + 4 \times 6^2.$$

Die Addition ist die Grundoperation; durch Umkehrung derselben erhält man die Subtraction, durch Wiederholung (bei gleichen Summanden) die Multiplikation und durch Umkehrung dieser die Division. Das Potenziren ist eine Wiederholung der Multiplikation

bei gleichen Faktoren, während Radiziren und Logarithmiren Umkehrungen des Potenzirens sind. Die niederen Grundrechnungen Addition und Multiplikation haben je nur eine Umkehrung, da die Reihenfolge der Summanden bzw. Faktoren beliebig ist; das Potenziren hat dagegen zwei Umkehrungen, da außer $2^4 = 4^2$ niemals $a^x = x^a$ ist. Hier folgt der besseren Uebersicht halber eine Zusammenstellung der sieben Grundrechnungen:

Niedere Operationen	Addition:	$6 + 4 = 10, \quad 4 + 6 = 10$
	Subtraktion:	$10 - 4 = 6, \quad 10 - 6 = 4$
	Multiplikation:	$\left.\begin{array}{l} 3 + 3 + 3 + 3 = 4 \times 3 \\ 4 + 4 + 4 \quad = 3 \times 4 \end{array}\right\} = 12$
	Division:	$12 : 3 = 4, \quad 12 : 4 = 3$
Höhere Operationen	Potenziren:	$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 729 = 3^6$ 3 heißt Basis, 6 Exponent.
	Radiziren:	$\sqrt[6]{729} = 3$, da $3^6 = 729$ ist. Die Basis ist die gesuchte Größe.
	Logarithmiren:	log. 729 zur Basis 3 = 6 Der Exponent ist die gesuchte Größe.

Beim Logarithmiren bedient man sich in der Praxis stets der Basis 10, da dann log. 1 = 0, log. 10 = 1, log. 100 = 2 und log. 1000 = 3 u. s. f. ist. Der Logarithmus der Zahlen wird dann durch Dezimalbrüche dargestellt, deren vor dem Komma stehender Teil (Charakteristik) sofort durch Zählen der Ziffern bestimmbar ist, während die Bruchteile (Mantisse) Tabellen entnommen werden. Die logarithmische Rechnung bietet den Vorteil, daß die Multiplikation in eine Addition, die Division in eine Subtraktion, das Potenziren in Multipliziren, das Radiziren in Dividiren erniedrigt wird, wodurch die Rechnung sich natürlich bedeutend vereinfacht. Die siebente Grundrechnung verhilft uns dazu, die dritte bis sechste bez. durch die erste bis vierte zu erledigen.

Das logarithmische Rechnen, ebenso das Auswendiglernen des Einmaleins, der Quadratzahlen (1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400) und der Kubikzahlen (1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000) dient einem wissenschaftlichen Prinzip, welches E. Mach „Oekonomie

des Denkens" genannt hat.[1]) „Wenn das Denken mit seinen begrenzten Mitteln versucht, das reiche Leben der Welt widerzuspiegeln, von dem es selbst nur ein kleiner Teil ist und das zu erschöpfen es niemals hoffen kann, so hat es alle Ursache mit seinen Kräften sparsam umzugehen." Auf solche Sparsamkeit wirkt der ganze Rechenunterricht hin, da der Schüler immer mehr das Einzelne zusammenzufassen und mit weniger Geistesanstrengung zu beherrschen lernen soll. Die sogenannten Rechenkünstler, von denen vor Jahrzehnten der Hamburger Dase (1830) und neuerdings der Franzose Inandi sich besonders hervorthaten, erreichen ihre staunenswerten Leistungen lediglich durch eine methodisch geübte und befestigte Oekonomie des Denkens. Folgender Zeitungsbericht über eine Vorstellung Inandi's veranschaulicht, was sich hierdurch erreichen läßt: „Wie der Mann mit den ungeheuerlichsten Zahlengebilden umgeht, ist geradezu unheimlich. Herr Inandi ist jetzt ein Mann von dreißig Jahren, eine angenehme Erscheinung mit einem mächtig ausgebildeten Schädel. Schon die Hälfte seines Lebens beschäftigt er sich berufsmäßig mit der Rechenkunst, für die er als Knabe bereits eine ausgeprägte Neigung und Fähigkeit zeigte. Zahlenreihen, für die ein anderer Mensch schon gar keine Bezeichnung mehr findet, in allen Rechnungsarten durchzuarbeiten, ist ihm ein Kinderspiel. Ein Herr aus der Zuhörerschaft nennt ihm als seinen Geburtstag den 16. März 1864. Sofort rechnet Herr Inandi aus: das macht ein Alter von 32 Jahren, 9 Monaten, 1 Tag, 17209440 Minuten, 1 032566400 Secunden. Der Rechenkünstler wird gefragt, was für ein Tag der 3. November 1872 war, und umgehend erfolgt die Antwort: ein Sonntag; der 16. Juni 1818: ein Dienstag; der 17. October 1813: ein Sonntag. Einige dreistellige Zahlen ins Quadrat zu erheben, ist dem Rechenkünstler gar nichts. Nicht viel mehr Schwierigkeit aber macht ihm die Subtraktion zweier 24stelliger Zahlen von einander, natürlich aus dem Kopfe, nachdem er die Zahlen, ohne sie auf der Tafel gesehen zu haben, wiederholt hatte. Und er war mit seiner Aufgabe eher fertig als der Herr, der sie an der Tafel schriftlich löste. Zum Schluß aber, und das war das Verblüffendste, wiederholte der Künstler aus dem Kopfe die sämmtlichen Aufgaben

[1]) Populär wissensch. Vorlesungen von E. Mach, Leipzig 1896 S. 203, sowie desselben Verfassers „Prinzipien der Mechanik" Leipzig 1889.

des Abends, deren Zahlen vier nebeneinander gestellte Tafeln füllten, ohne eine Zahl gesehen zu haben. Der Künstler rechnet die Aufgaben mit den größten Zahlen mit einer fabelhaften Geschwindigkeit halblaut für sich aus und trägt dann das Resultat laut vor; die Herren, die sie stellten, hatten sie zur Controle vorher für sich berechnet und konnten jedesmal nur die Richtigkeit der Lösung bestätigen. Erschwerend ist dabei noch der Umstand, daß Herr Inandi die Zahlen in der deutschen Sprache hersagen muß, deren er sonst durchaus nicht mächtig ist." Dase sagte von sich: „Nur durch die Kunst des Zerlegens der Zahlen in ihre Summanden oder Faktoren und jene merkwürdige Uebung, welche meinen Geist dabei unterstützt, bewirke ich das Unglaubliche." Wie wenig schwierig es ist, Quadrat- und Kubikwurzeln, wenn sie aufgehen, auszuziehen, mag jeder probiren, der die oben angeführten zweiten und dritten Potenzen auswendig kennt. Giebt jemand z. B. die Kubikzahl 46 656, so enthalten die ersten beiden Ziffern, da $10^3 = 1000$ ist, den Zehner. Dieser kann nur 3 sein, weil 4^3 bereits $= 64$ ist. Da ferner die Potenz mit einer 6 endet, so kann nur 36 die Antwort sein. Ist die Quadratzahl 3136, so enthalten die ersten beiden Ziffern, da $10^2 = 100$ ist, die Zehner. Die Antwort könnte nun 54 und 56 sein, da 4^2 und 6^2 beide mit einer Sechs endigen. Man kann aber leicht die Entscheidung für 56 treffen, da 3136 näher an 3600 $= 60^2$, als an $2500 = 50^2$ liegt und also $31 - 25 > 36 - 31$ ist. Ebenso enden auch 2^2 und 8^2 mit einer Vier. Hier ist der Zweifel, ob 2 oder 8 zu nehmen sei, noch leichter behoben; auch für 3^2 und 7^2, die beide eine Neun am Ende haben, und am leichtesten für 1^2 und 9^2, die mit einer Eins endigen.

Von fast kindlicher Einfachheit ist das Zahlenerrathen, wie Carl Willmann es in seinem Werke über „Moderne Wunder" (Leipzig 1892) beschreibt. Eine Anzahl von Karten, jede mit einer großen Zahl bezeichnet und am Rande mit einem Buchstaben und einer Zahl versehen, z. B. D 7, wird unter die Anwesenden verteilt und der „Hellseher" macht sich nun anheischig, von jeder beliebigen Karte die große Zahl zu nennen, falls ihm die Signatur z. B. D 7 genannt wird. Diese enthält nämlich den Schlüssel zum Errathen, da der Buchstabe einen Zehner bedeutet, D z. B. = 50 ist. Durch verschiedene Rechenoperationen, die der Hellseher mit der

Zahl 50 und der bemerkten Zahl 7 vornimmt, kann er schnell die große Zahl auf der betreffenden Karte ausrechnen und nennen. Erst bildet sich der Rechenkünstler aus den Zehnern 50 (D) und den Einern 7 die Zahl 57. Sodann zählt er Zehner 5 und Einer 7 zusammen: $5 + 7 = \mathbf{12}$, jetzt nimmt er die Summe mal 2: $57 \times 2 = \mathbf{114}$, nun zieht er die Zehner von den Einern ab: $7 - 5 = \mathbf{2}$ und zuletzt nimmt er Zehner mal Einer: $5 \times 7 = \mathbf{35}$, die Ergebnisse der 4 Rechenexempel setzt er nach der Reihe zusammen und erhält die große Zahl 12 114 235. Nach dieser Schablone werden zum größten Staunen des harmlosen Zuschauers alle großen Zahlen der Karten errathen. Man kann sich leicht dieses Spiel herstellen und wird sich über die Wirkung desselben freuen. Andere Rechenkünste beruhen auf einfachen Gleichungen, deren Bildung auf Verdeckung des Thatbestandes gerichtet ist, oder auf der sogenannten Neunerprobe. Diese letztere wollen wir nicht getrennt behandeln, sondern im Zusammenhange mit der Frage nach der Teilbarkeit der Zahlen. Bekanntlich giebt uns das Sieb des Eratosthenes die Primzahlen, welche keinen Faktor außer der Eins enthalten. Man streicht, um sie zu bekommen, jede zweite, dann jede dritte, jede fünfte u. s. f. Ziffer der Zahlenreihe aus; die übrigbleibenden sind die Primzahlen. Jene lassen sich in Faktoren zerlegen und zwar sind sie durch 2, 4, 8, 16 teilbar, wenn die letzte, bez. die beiden letzten, bez. die drei letzten, bez. die vier letzten Stellen durch jene Zahlen teilbar sind. Alle Tausende sind z. B., da $8 \times 125 = 1000$ ist, durch 8 teilbar, man braucht also nur noch die hinter den Tausenden stehende Zahl zu prüfen u. s. w. Daß Zahlen, die eine 0 oder 5 am Ende haben, auch durch 5 teilbar sind, ist bekannt und leicht einzusehen; ebenso, daß eine 25, 50, 75 oder zwei Nullen am Ende der Zahl auf die Teilbarkeit durch 25 schließen lassen. Da ein Zehner, Hunderter, Tausender u. s. f. bei der Teilung durch 3 und 9 stets eine Eins als Rest läßt (congruent 1 modulo 3 und 9 ist der mathematische Ausdruck dafür), so braucht man nur festzustellen, ob die Quersumme einer Zahl durch 3 und 9 teilbar ist. Trägt eine Zahl das Merkmal für zwei Faktoren, so ist sie natürlich auch direkt durch deren Produkt teilbar, z. B. durch 12, falls die Quersumme durch 3, die letzten beiden Ziffern aber durch 4 ohne Rest sich teilen lassen.

Nun ist 12 345 679 × 9 = 111 111 111. Man kann daher folgenden Zahlenscherz ausführen. Jemand aus der Gesellschaft nennt seine Lieblingszahl, z. B. 7. Nun läßt man ihn 12 345 679 mit 63 (7 × 9) multipliziren, so wird er 777 777 777 erhalten. Durch Multiplikation derselben Zahl 12 345 679 mit 8 erhält man 98 765 432, eine Zahlenzusammensetzung, in der nur die Eins fehlt. Andere merkwürdige Resultate sind folgende:

$$1 \times 9 + 2 = 11$$
$$12 \times 9 + 3 = 111$$
$$123 \times 9 + 4 = 1111$$
$$1234 \times 9 + 5 = 11\,111$$
$$12\,345 \times 9 + 6 = 111\,111$$
$$123\,456 \times 9 + 7 = 1\,111\,111$$
$$1\,234\,567 \times 9 + 8 = 11\,111\,111$$
$$12\,345\,678 \times 9 + 9 = 111\,111\,111$$

$$9 \times 9 + 7 = 88$$
$$98 \times 9 + 6 = 888$$
$$987 \times 9 + 5 = 8888$$
$$9876 \times 9 + 4 = 88\,888$$
$$98\,765 \times 9 + 3 = 888\,888$$
$$987\,654 \times 9 + 2 = 8\,888\,888$$
$$9\,876\,543 \times 9 + 1 = 88\,888\,888$$
$$98\,765\,432 \times 9 = 888\,888\,888$$

$$1 \times 8 + 1 = 9$$
$$12 \times 8 + 2 = 98$$
$$123 \times 8 + 3 = 987$$
$$1234 \times 8 + 4 = 9876$$
$$12\,345 \times 8 + 5 = 98\,765$$
$$123\,456 \times 8 + 6 = 987\,654$$
$$1\,234\,567 \times 8 + 7 = 9\,876\,543$$
$$12\,345\,678 \times 8 + 8 = 98\,765\,432$$
$$123\,456\,789 \times 8 + 9 = 987\,654\,321$$

Die Neunerprobe beruht auf der Thatsache, daß die Division der Quersumme einer Zahl durch 9 denselben Rest läßt, wie die Zahl selber. Man kann mit ihrer Hilfe die Richtigkeit einer Rech-

nung für alle Grundoperationen feststellen. Folgende Beispiele mögen die Methode erläutern:

Addition:	Neunerreste:	Subtraktion:	Neunerreste:
2 456 793	0	37 246 928	5
1 452 864	3	— 9 066 936	3
7 290 436	4	28 179 992	2
12 100 093	7		

Bei der Addition muß der Neunerrest der Summanden gleich dem Neunerrest der Summe sein, bei der Subtraktion der Neunerrest des Minuenden gleich der Summe der Neunerreste des Subtrahenden und des Restes.

Bei der Multiplikation muß das Produkt der Neunerreste der Faktoren gleich dem Neunerreste des Produktes sein, während bei der Division das Produkt der Neunerreste des Divisors und des Quotienten vermehrt und der Neunerrest des Restes gleich sein muß dem Neunerrest des Dividenden.

Multiplikation:

372 584	2	$\left.\right\}$ 2 × 5 = 10 Rest 1
× 46 157	5	
17 197 359 688	. . . .	Rest 1

Division:

2 708 563 : 8265 = 327,714 (Rest 679)

Reste: 4	3 ⏟	6	4
	18		18
4	=		22 (Rest 4)

Unbedingte Sicherheit bietet die Neunerprobe allerdings nicht, da durch Umstellung oder durch Vermehrung und Verminderung der Ziffern um dieselbe Größe die Quersumme nicht geändert wird: 2758 giebt denselben Rest wie 2695.

Viel sicherer, aber auch zeitraubender würde die Probe mit den Divisoren 11 und 37 sein. Bei der Teilung durch 11 läßt ein Einer, Hunderter, Zehntausender u. s. f. den Rest + 1, dagegen ein Zehner, Tausender u. s. f. ist um 1 zu klein, er läßt daher den Rest — 1. Ob demnach eine Zahl durch 11 teilbar ist, können wir entscheiden, wenn wir die Summen der ungeraden und geraden

Stellen einer Zahl von einander abziehen. Nur wenn der Rest 0, 11, 22 . . . . ist, geht die Division der ganzen Zahl auf: z. B. 57 829 244. Hier ist die eine Summe 15, die andere 26 und die Division geht daher auf, weil 26 — 15 = 11 ist. Bei der Teilung durch 37 läßt die Einheit der zweiten, fünften, achten u. s. f. Stelle den Rest 10, die der dritten, sechsten, neunten läßt — 11 als Rest, da sie um 11 zu klein ist. Dagegen ist die Einheit der ersten, vierten, siebenten um 1 zu groß, da z. B. 999 = 27 . 37 = 1000 — 1 ist. Man addirt also das zehnfache der ersten Gruppe und das einfache der dritten und subtrahirt davon das elffache der zweiten. Der erhaltene Rest giebt zugleich den Rest der Teilung für die ganze Zahl. Z. B. 123 456 789.

$$
\begin{array}{lr}
\text{I.}\ \ 1\,(9 + 6 + 3) = & 18 \\
\text{II.}\ \ 10\,(8 + 5 + 2) = & \underline{150} \\
 & 168 \\
\text{III.}\ \ 11\,(7 + 4 + 1) = & \underline{132} \\
 & \text{Rest}\ 36
\end{array}
$$

Demnach ist 123 456 790 durch 37 teilbar und giebt als Quotient 3 336 670.

Unter „Gleichungen" versteht die Mathematik bekanntlich Aufgaben, in denen durch Angabe gewisser Größenbeziehungen ermöglicht wird, eine oder mehrere Unbekannte zu ermitteln. Sollen die Werte derselben eindeutig bestimmt sein, so müssen ebensoviele Größenbeziehungen (Gleichungen) gegeben sein, als Unbekannte vorhanden sind. In den Schulen verfährt man bei der Aufstellung und Lösung nach Methoden, die sich im Laufe der Zeit aus dem Prinzip der Sparsamkeit im Denken ergeben haben. Bis in das 17te Jahrhundert war eine von den Indern und Arabern überlieferte Methode in Gebrauch, die Regel des falschen Ansatzes. (**Regula falsi, Elchatayn**).[1]) Man wählt zwei beliebige, also voraussichtlich falsche Werte für die Unbekannte und ermittelt die Fehler in den vorliegenden Größenbeziehungen. Dann ist der gesuchte richtige Wert gleich dem Quotienten, den man erhält, wenn man die Differenz $f_1\, e_2 - e_1\, f_2$ durch den Rest $f_1 - f_2$ dividirt, wenn e die falschen Werte, f die Fehler sind. In vielen Fällen wird sich die Rechnung

[1]) Cantor, Gesch. der Mathematik, 1. Bd. (2. Aufl.) S. 689. Leipzig 1894.

vereinfachen lassen, indem man $e_1 = 0$ wählt und e_2 einer Zahl gleich setzt, mit der sich f_1 leicht multipliziren läßt. Man muß übrigens genau auf die Vorzeichen achten.

Hier sind drei Beispiele von eingekleideten Aufgaben: „Ich habe eine Zahl im Sinn. Addire ich 6, multiplizire die Summe mit 7, ziehe 1 ab, dividire durch 10 und addire jetzt noch 1, so erhalte ich wieder die ursprüngliche Zahl. Wie groß ist sie?“ Wir nehmen die falschen Werte 1 und 0. Dann kommt bei der Einsetzung eine Abweichung von 4,8 bez. 5,1 heraus und man bekommt $1 \times 5{,}1 - 0 \times 4{,}8 : 5{,}1 - 4{,}8 = \frac{5{,}1}{0{,}3} = \mathbf{17}$ als Antwort. „Es wird eine Zahl gesucht, deren Fünffaches um ebenso viel größer als 20 ist, als die Zahl selber kleiner ist, als 20“. Setzt man $e_1 = 10$, $e_2 = 6$, so ist $f_1 = 20$, $f_2 = -4$, mithin $(120 + 40) : 24 = 6^2/_3$. „In einer Gesellschaft waren dreimal so viel Damen als Herren, und als acht Ehepaare den Saal verließen, waren noch fünfmal so viel Damen als Herren anwesend“. Setzt man die Zahl der Herren $e_1 = 0$, $e_2 = 10$, so ist $f_1 = 32$, $f_2 = 12$, mithin $320 : 20 = 16$, also 16 Herren und 48 Damen.

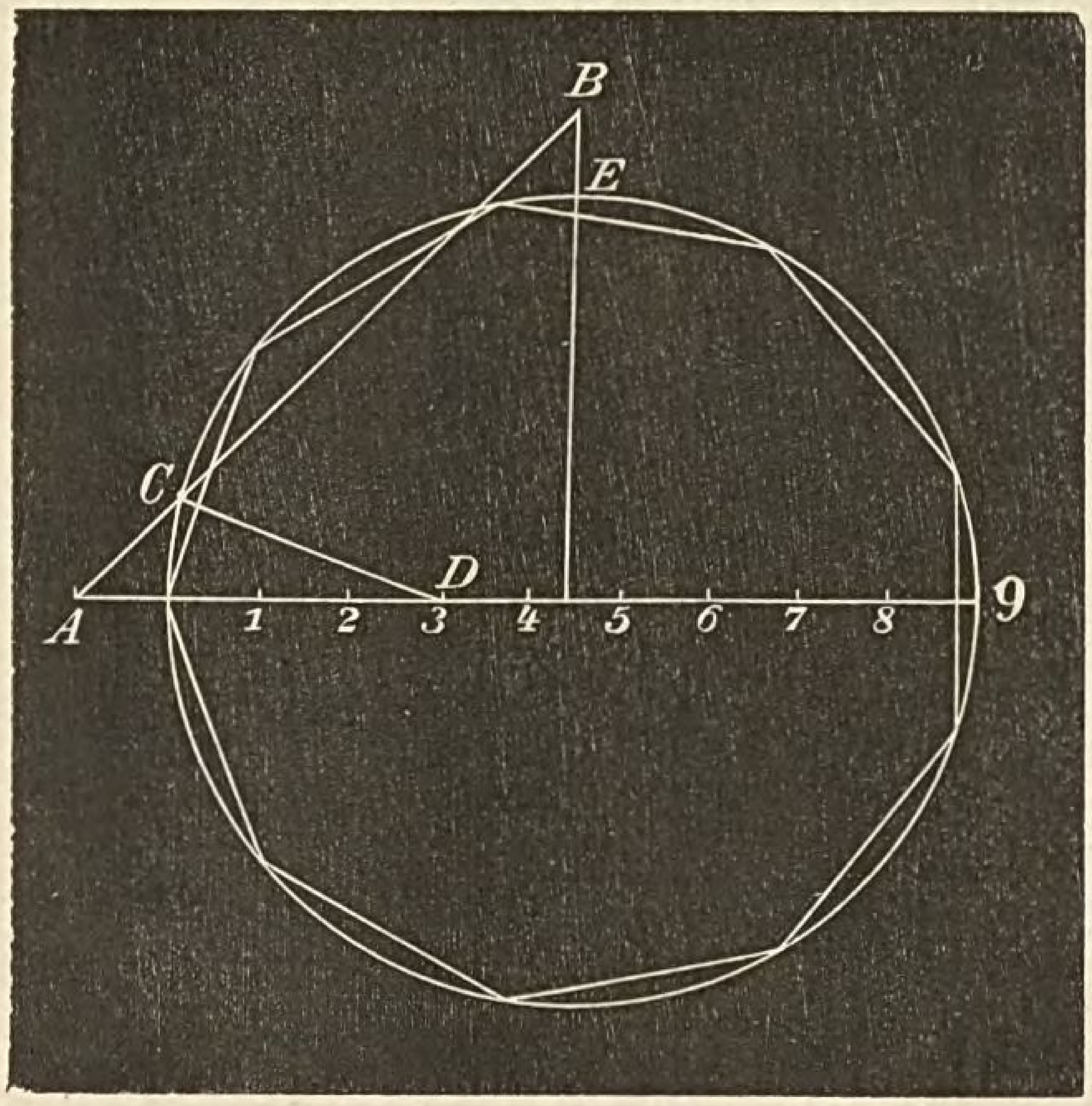
Viele Aufgaben haben eine historische Berühmtheit erlangt. Unzählige Mathematiker des Altertums haben sich mit der Dreiteilung des Winkels, mit der Rektifikation und Quadratur des Kreises und dem sogenannten „delischen Problem“ beschäftigt. Einen beliebigen Winkel in drei gleiche Teile zu teilen, sowie die Länge und den Inhalt eines Kreises genau darzustellen, gelingt mit den zulässigen Hilfsmitteln der Geometrie, mit Zirkel und Lineal allein nicht.[1]) Da man jeden Kreisbogen oder Winkel halbiren kann, so ist die Teilung des Kreises in 2, 4, 8, 16 . . . . . 2^n Teile möglich; ebenso auch, da der Halbmesser die Seite des Sechsecks ist, gelingt die Teilung in 3, 6, 12, 24 . . . . . 3×2^n Teile. Der Um-

---

[1]) Man hat sogar Geometrien ausgebildet, die nur eines dieser beiden Hilfsmittel zulassen. Der Italiener Mascheroni machte (1797) den Versuch, alle Konstruktionen ohne Lineal auszuführen, nur mit Hilfe des Zirkels und behauptet, hierbei genaue Zeichnungen erhalten zu haben. Umgekehrt haben wieder die Schüler des Franzosen Carnot nur mit dem Lineal allein konstruirt, während Poncelet noch einen festen Kreis hinzunahm, ein Verfahren, welches auch Steiner ausgeübt hat.

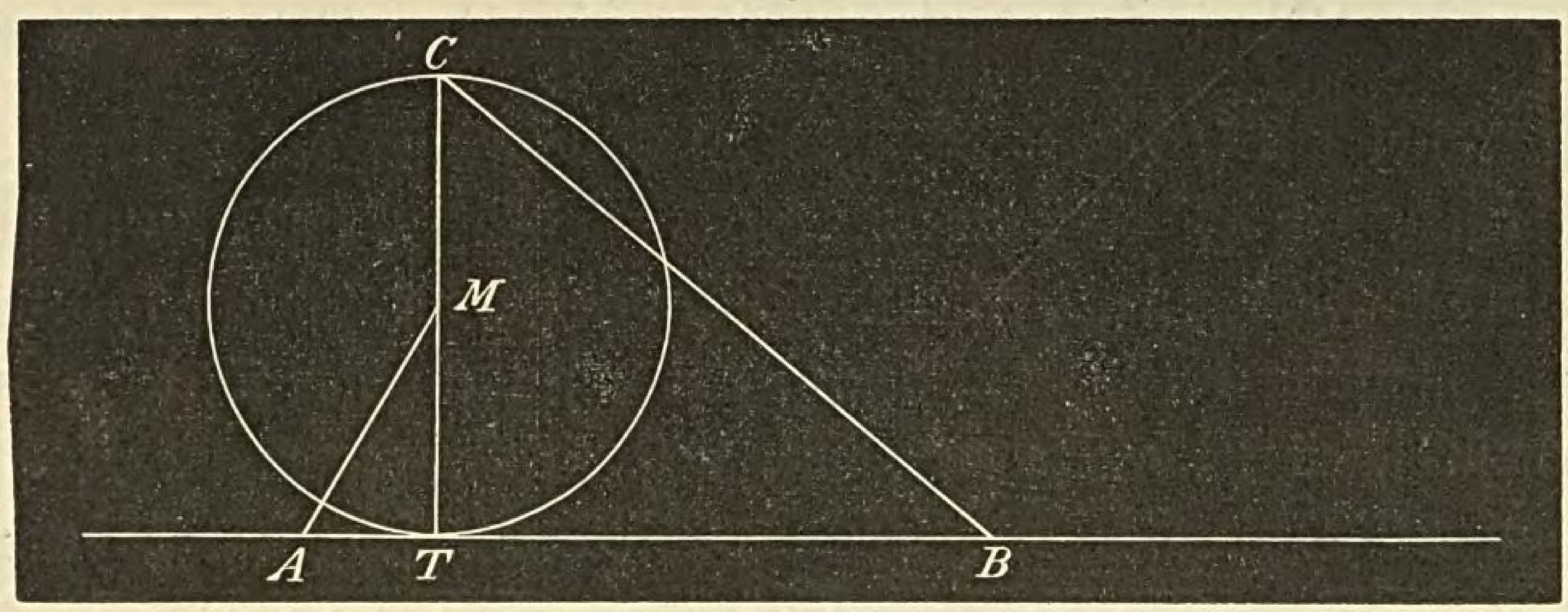
stand, daß die Seite des Zehnecks größerer Abschnitt des nach dem „goldenen Schnitt" geteilten Halbmessers ist, giebt noch die Reihe 5, 10, 20 . . . . 5×2^n und endlich giebt die Kombination der Zehneck- und Sechseckseite das Fünfzehneck und damit die Reihe 15×2^n, weil der Bestimmungswinkel des Fünfzehnecks 24° (360 : 15) beträgt und diese Zahl die Differenz ist von 60° (360 : 6) und 36° (360 : 10). Gauß hat ferner nachgewiesen, daß jedes $(2^{2m} + 1)$-Eck geometrisch gezeichnet werden kann, wenn die Zahl $2^{2m} + 1$ eine Primzahl ist und man hat so wirklich das 17-Eck, das 257-Eck und das 65537-Eck konstruirt. Es giebt eine Reihe von Methoden, nach denen man mit hinlänglicher Genauigkeit jede Teilung des Kreises ausführen kann. Die in Fig. 1 benutzte Konstruktion ist vom Prinzen Bernhard von Weimar angegeben. Der Durchmesser des Kreises wird in so viele gleiche Teile geteilt, als man haben will, darauf der Durchmesser sowohl, wie der auf ihm senkrechte Radius um einen dieser Teile verlängert und die neuen Endpunkte A und B verbunden. Den nächsten Schnittpunkt C der Verbindungslinie mit dem Kreise verbindet man mit dem dritten Teilpunkt des Durchmessers, so ist diese Linie CD die Seite des regelmäßigen eingeschriebenen Neunecks. Zieht man in den Teilpunkten Tangenten, so hat man auch das umschriebene Neuneck. Die Länge der Kreisperipherie liegt offenbar zwischen den Umfängen dieser beiden Figuren und diesen Umstand hat zuerst Archimedes im dritten Jahrhundert vor unserer Zeitrechnung benutzt, um zu finden, wie oft der Durchmesser in der Peripherie des Kreises enthalten ist. (Rektifikation). Er fand die Verhältnißzahl $\pi = \frac{22}{7}$; während der ägyptische Papyrus Rhind (König Ahmes, 2000 v. Chr.) $\left(\frac{16}{9}\right)^2$

Fig. 1.



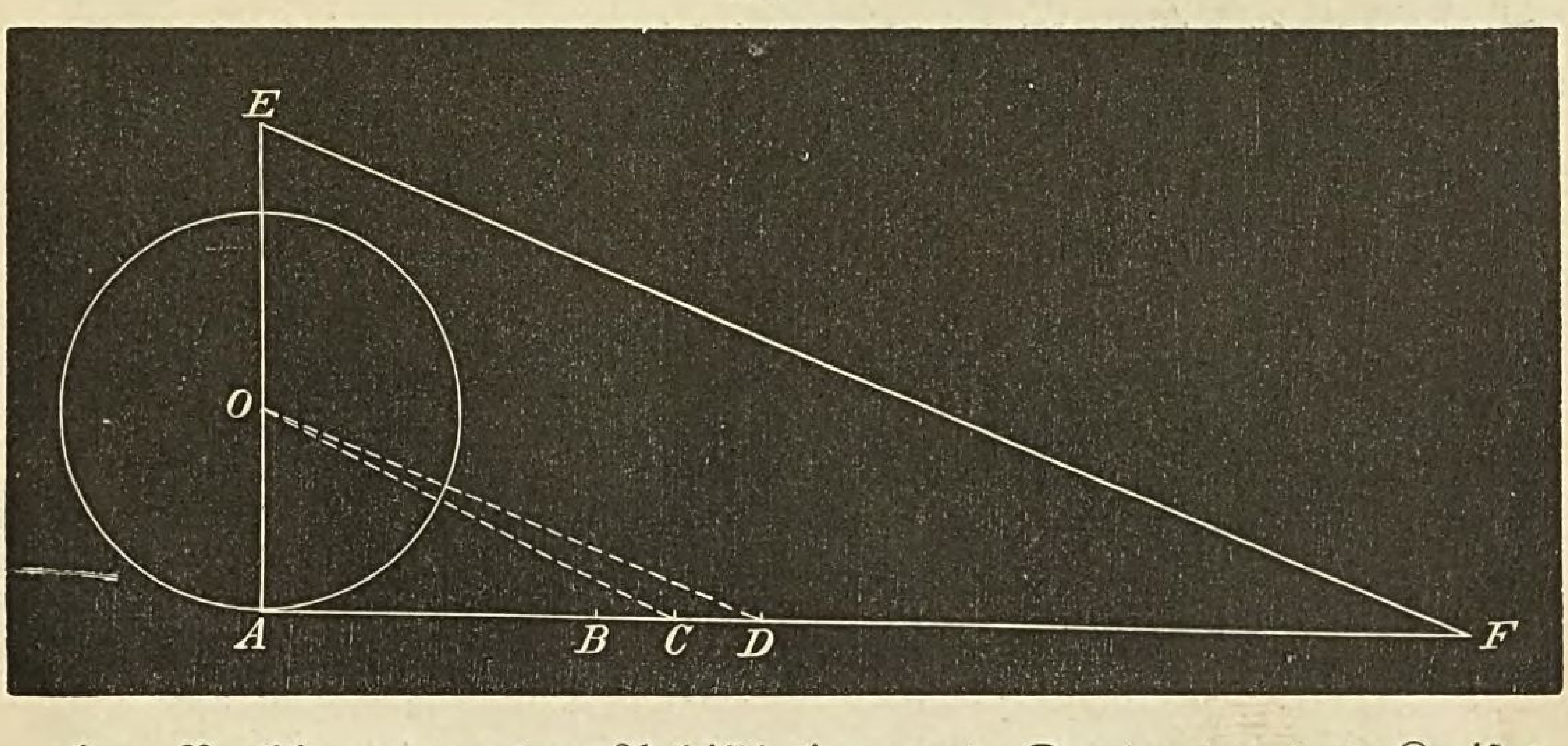
= 3,16 ... angiebt. Besonders Huygens im siebzehnten Jahrhundert, dem wir auch die heutige Wellentheorie des Lichtes verdanken, hat jene Exhaustionsmethode des Syrakusaners fortgesetzt und bedeutend genauere Resultate erhalten. Aber schon im Altertum versuchte man π auch mit Hilfe höherer Kurven zu bestimmen und seit Leibnitz, Newton und Euler hat man mit Hilfe der unendlichen Reihen π auf eine sehr große Anzahl von Dezimalen

Fig. 2.



genau ermittelt. Im Jahre 1882 hat Lindemann bewiesen, daß π eine Zahl ist, die sich durch keinerlei arithmetische oder geometrische Methoden genau bestimmen läßt. Daher ist die Lösung der

Fig. 3.



alten Probleme von der Rektifikation und Quadratur des Kreises als unmöglich erwiesen: denn die Länge des Kreises ist das π-fache des Durchmessers, sein Inhalt das π-fache vom Quadrate des Halbmessers. Zwei recht einfache und dabei recht genaue „Rektifikationen" der Kreislänge sind in Fig. 2 und 3 dargestellt. Die erste stammt

von Kochanski (1685) und ist auf etwa ein Hunderttausendstel genau. An einen Endpunkt des Durchmessers wird die Tangente, an den Mittelpunkt ein Winkel von 30° gelegt, der jene in A schneidet. Trägt man dann von A aus den Radius dreimal auf der Tangente ab und verbindet den Endpunkt B mit dem Endpunkt C des Durchmessers, so stellt diese Linie die halbe Peripherie dar. Nicht ganz so einfach, aber noch etwa hundertmal genauer ist die folgende von Specht herrührende Konstruktion. Auf der Tangente ist $AB = 2r$, $BC = \frac{1}{5}r$, $CD = \frac{2}{5}r$ abgetragen, darauf $AE = OC$ gemacht und EF parallel mit OD gezogen. Durch Anwendung des Pythagoras ergiebt sich, daß AF die Länge der Kreislinie bis auf das 0,0000007fache des Radius genau darstellt. Dieser Fehler beträgt auf 7000 km (der Erdumfang beträgt 6366 km) erst einen einzigen Meter. Der Merkwürdigkeit halber sei erwähnt, daß die Franzosen die Zahl π bis auf 30 Dezimalen in folgendem Merkverse festgelegt haben:

> Que j'aime à faire apprendre un nombre utile aux sages
> Immortel Archimède, antique ingénieur,
> Qui de ton jugement peut sonder la valeur,
> Pour moi ton problème est de pareils avantages.

Setzt man für jedes Wort die Zahl seiner Buchstaben, so bekommt man $\pi = 3,14159\ 26536\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279 \ldots\ldots$ Uebrigens haben sich Leute gefunden, die in unserer schnelllebigen Zeit die Muße hatten, π auf mehr als 700 Stellen genau zu berechnen.

Das sogenannte „delische" Problem stellt folgende Aufgabe. Eratosthenes schrieb an Ptolemaeus Euergetes darüber, daß die Bewohner der Insel Delos dem Orakel des Apollo zu Folge den Inhalt ihres würfelförmigen Altars hätten verdoppeln sollen. Darüber hätten sie betreffs der neuen Kantenlänge einen Meinungsaustausch mit Plato gehabt. Es handelt sich also darum, die neue Kante $\sqrt[3]{2}$ mal so groß zu machen, als die alte. Diese Größe läßt sich, da sie irrational ist, als Dezimalbruch nicht genau ermitteln, wohl aber als Linie geometrisch darstellen. Die Lösung wurde damals durch Aufstellung einer dreifachen Proportion unter Zuhilfenahme einer vermittelnden Größe y so gefunden:

$$a : x = x : y = y : 2a,\ x^2 = ay;\ y^2 = 2ax,\ x^4 = 2a^3x,$$

daher $x^3 = 2a^3$, $x = a\sqrt[3]{2}$, wo x die neue und a die alte Kante ist.

Das Problem der Dreiteilung eines beliebigen Winkels hat unzählige Versuche herausgefordert; doch ist bis heute keine Lösung bekannt, in der man mit Zirkel und Lineal allein konstruirt. In jeder noch so einfachen Konstruktion findet sich ein Moment, wo offen oder versteckt eine Hilfskurve benutzt wird, wie das auch schon die Mathematiker des Altertums thaten. Fig. 4 und 5 geben zwei sehr einfache Lösungen. Man errichtet (Fig. 4) auf dem einen Schenkel des Winkels BAM im Scheitelpunkte ein Lot AC, errichtet in C ein Lot bis zum Schnittpunkt M des anderen Schenkels, beschreibt um M mit MA einen Kreis und bestimmt

Fig. 4.

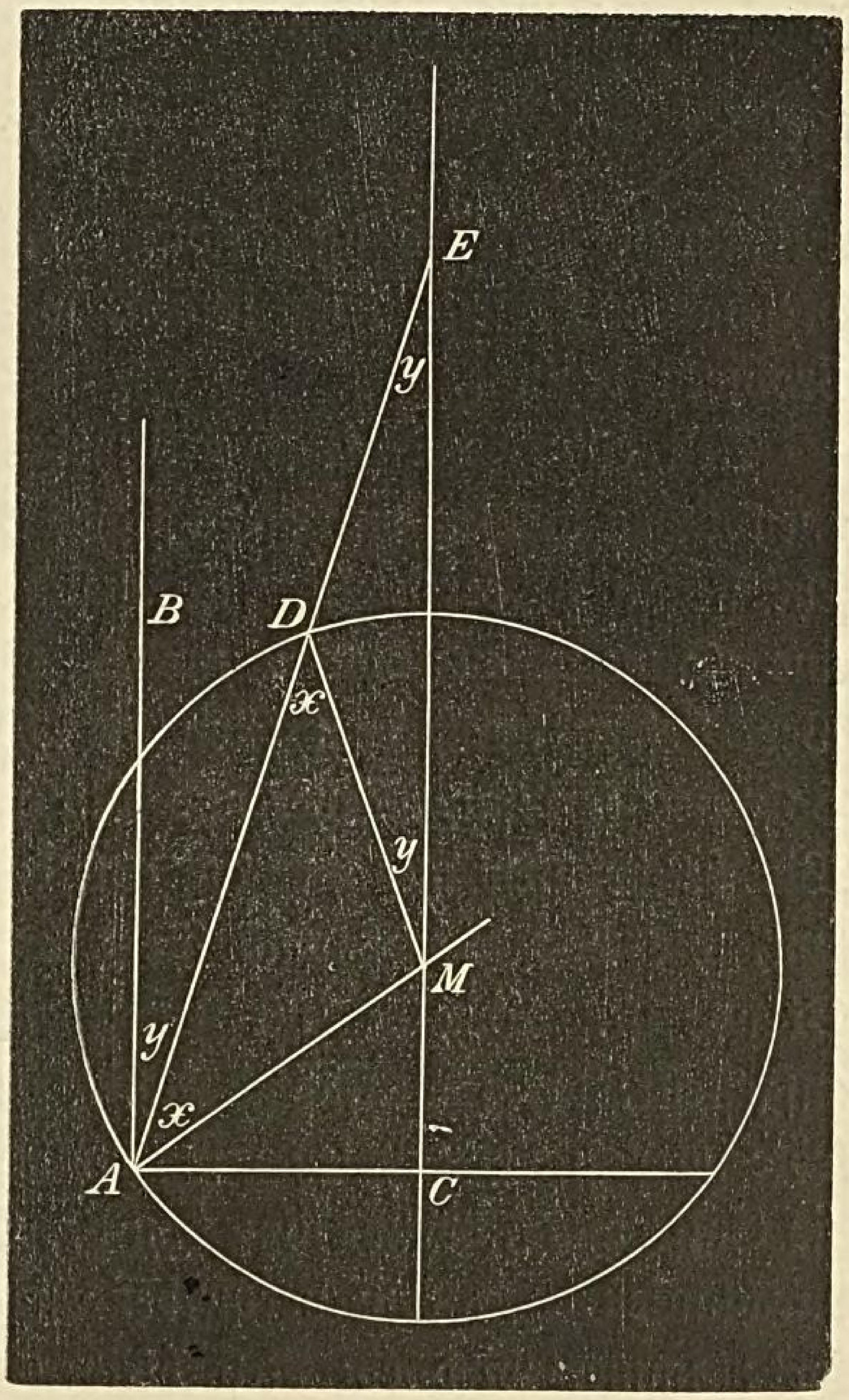
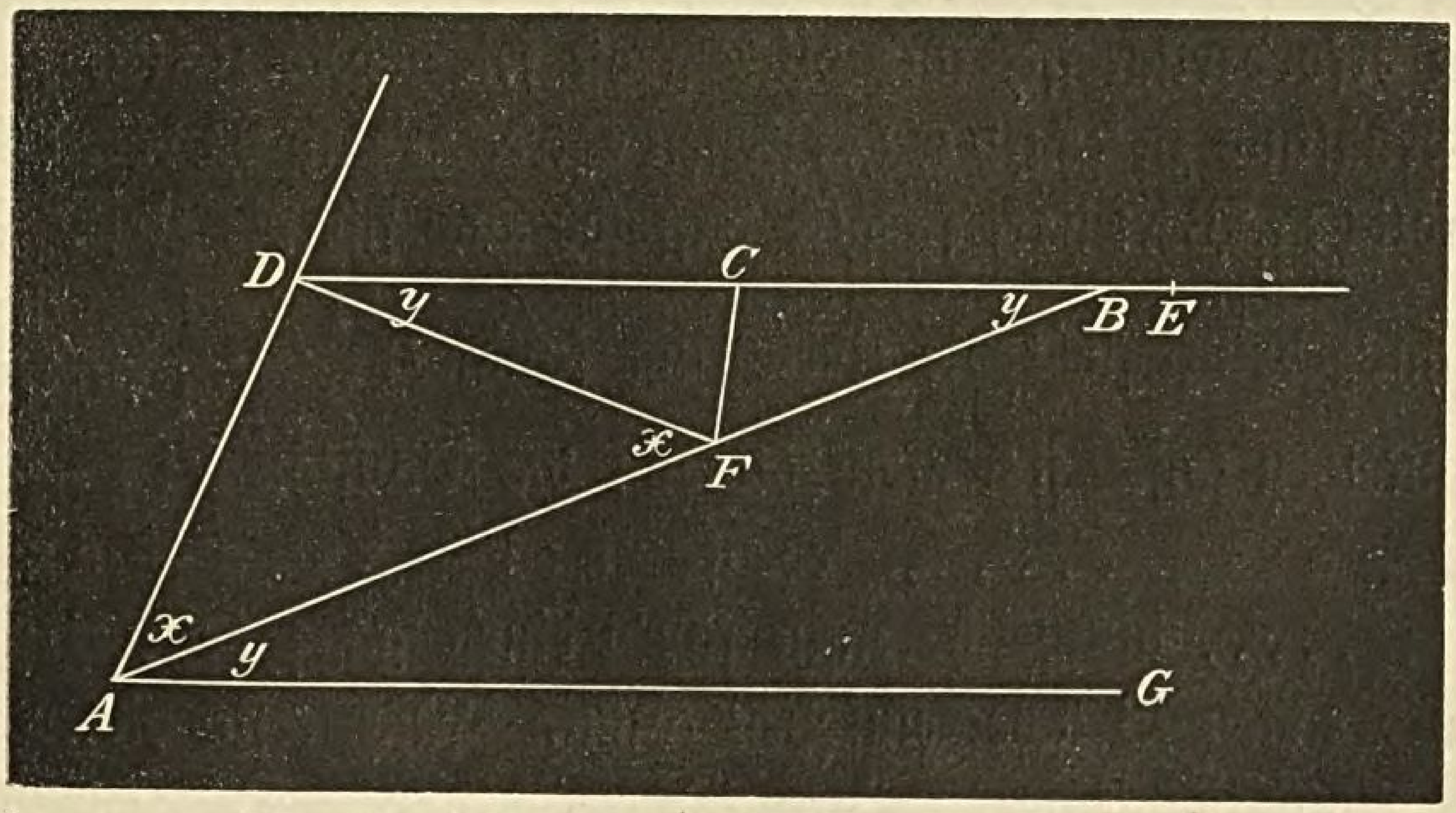


Fig. 5.



auf diesem den Punkt D so, daß ADE und CME in gerader Linie liegen und DE = MD ist. Dann ist Winkel BAD (y) gleich dem

dritten Teile des Winkels BAM $(x + y)$, da $y = 2x$ ist, wie unmittelbar aus der Figur hervorgeht. In Fig. 5 soll Winkel GAD $= (x + y)$ trisezirt werden. Man macht $AD = DC = CE$ und bestimmt F so, daß auch $DF = FB = AD$ ist und AFB in gerader Linie liegen. Es ist Dreieck ADF sowohl, wie auch Dreieck DFB gleichschenklig und daher $x = 2y$ und $y = \frac{1}{3}$ GAD. Man wird bei Ausführung dieser Konstruktionen, bei der man sich mit Nutzen eines Meßbandes bedient, leicht finden, wo die Geometrie aufhört und das Probiren beginnt.

Seit etwa zwei bis drei Jahrhunderten hat die Analysis in den unendlichen Reihen ein vorzügliches Mittel geliefert, um die Zahl π sehr genau zu ermitteln. Wer sich für die Frage interessirt, wie eine Summation von unendlich vielen Gliedern einen endlichen Wert liefern kann, dem seien die „Paradoxien des Unendlichen von Bolzano" (Berlin, Mayer und Müller 1889, 2. Auflage) empfohlen. Wir beschränken uns hier auf eine berühmte Aufgabe aus dem Altertum, die das Verständnis für unendliche Reihen zu vermitteln im Stande ist. Der Sophist Zeno hatte die widersinnige Behauptung aufgestellt, der schnellfüßige Achill vermöge nicht, die träge Schildkröte im Laufe einzuholen. Er wollte das so beweisen: „Achill muß die Entfernung, welche ihn von der Schildkröte trennt, zunächst halb durchlaufen, von dem verbleibenden Rest wieder die Hälfte und so fort; immer wird ein Rest bleiben, der zunächst halb durchlaufen werden muß." Aus dieser an und für sich sehr richtigen Thatsache zieht nun Zeno den falschen Schluß, daß auch die Zeit, welche zum Einholen erforderlich ist, unendlich groß sei. Die Zeiten stehen in festem Verhältnis zu den durchlaufenen Strecken und da deren Summe einen endlichen Wert hat, so gilt dasselbe auch für die Zeit. Mathematisch ausgedrückt sieht die Zerlegung so aus: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$ Solcher Reihen lassen sich viele bilden: die Division $a : 1 - x$ giebt $a + ax + ax^2 + \ldots\ldots$, ebenso $a : 1 + x = a - ax + ax^2 - ax^3 + \ldots\ldots$, in welche man für a einen ganz beliebigen Wert, für x alle echten Brüche einsetzen kann. Die erste dieser Reihen stellt die Ablösung einer ewigen Rente a dar. Die Größe x ist der zu Grunde gelegte Zinsfaktor, für 3 % ist $x = 0{,}97$, für

4 % 0,96, für 5 % 0,95. Besteht also die Verpflichtung, jährlich 100 Mark zu zahlen, und man wünscht dieselbe abzulösen unter Anrechnung von 3 % Zinsen, so sind die nach einem Jahre zu zahlenden 100 M., bar 97 M. wert; die nach zwei Jahren fällige Schuld ist bar $100 \times (0{,}97)^2$ M. wert und so weiter. Die Ablösungssumme ist daher $100 + 100.\ 0{,}97 + 100.\ 0{,}97^2 + 100.\ 0{,}97^3 + \ldots = \frac{100}{1 - 0{,}97} = 10\,000 : 3 = 3333\tfrac{1}{3}$ M. Bei 3 % muß also das $33\tfrac{1}{3}$-fache als Ablösung bezahlt werden, bei 4 % das 25-fache, bei 5 % das 20-fache. Bei Kirchen- und Gemeinde-Verpflichtungen kommen ähnliche Aufgaben vielfach vor.

Die Zahl π kann aus folgenden Reihen ermittelt werden:

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{48} + \frac{3}{1280} + \frac{5}{14136} + \ldots\ldots$$

$$\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1 \times 3}{2 \times 4} \times \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1 \times 2 \times 5}{2 \times 4 \times 6} \cdot \frac{1}{7} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \ldots\right)$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots \text{ oszillirende Reihe von Leibnitz.}$$

$$\frac{\pi}{2} = \sqrt{3}\left(1 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^2} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3^3} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{3^4} - \ldots\right)$$

$$\frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5}\right) - \ldots\ldots$$

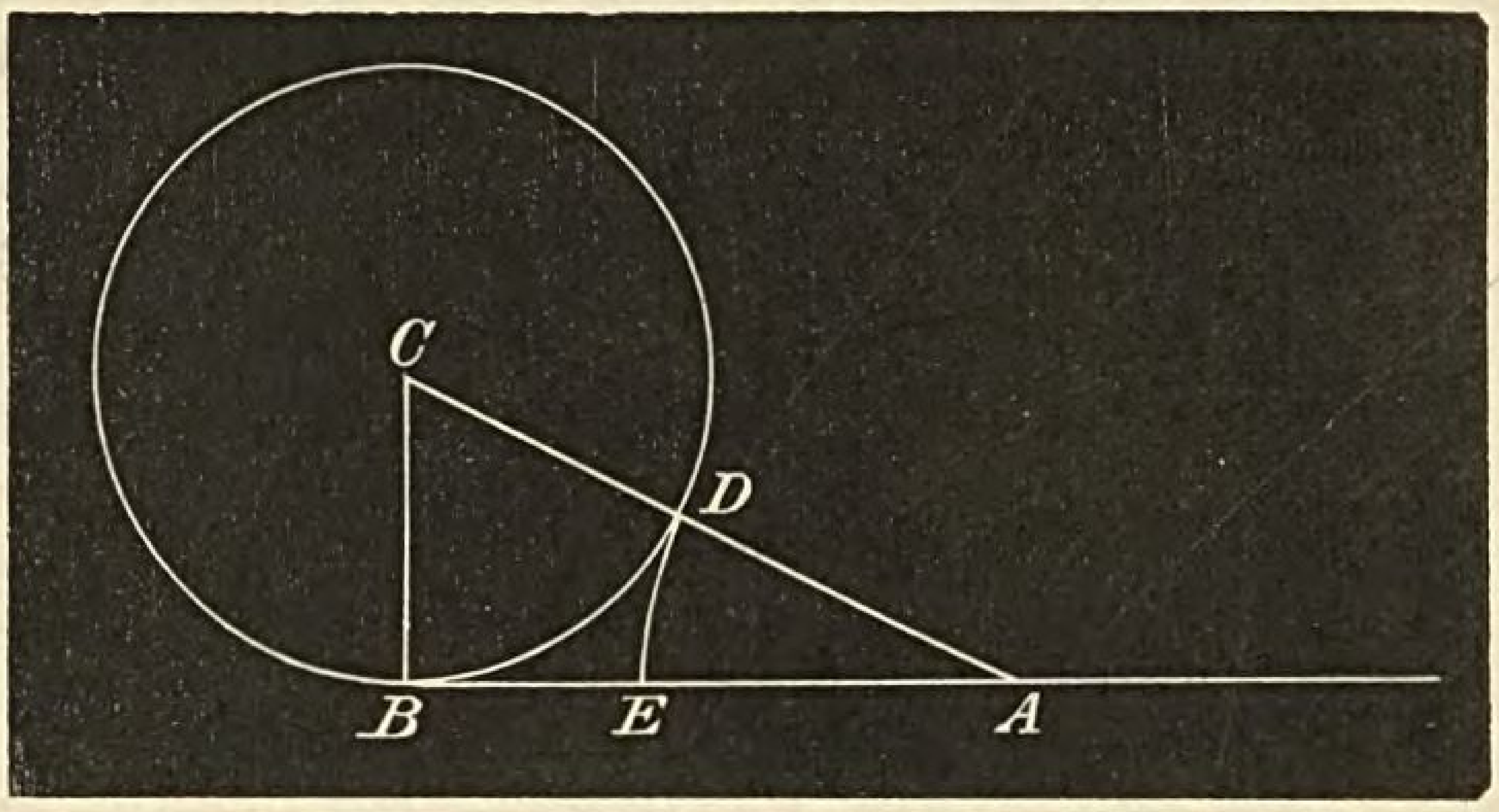
Von der sehr einfachen Leibnitz'schen Reihe müßte man allerdings 200 Glieder vereinigen, um π auf nur fünf Stellen genau zu erhalten. Sie liefert den Wert abwechselnd zu groß und zu klein und heißt daher oszillirende Reihe. Der Schweizer Mathematiker Bernoulli hat eine Reihe untersucht, die man wegen ihrer Beziehungen zur Musik die harmonische genannt hat. Sie lautet $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \ldots\ldots$ und enthält die reziproken Werthe der natürlichen Zahlenreihe. Läßt man eine Saite nach einander in den durch die Reihe angegebenen Teilen schwingen, so erhält man die natürliche Tonleiter (diatonische) und die Schwingungszahlen sind die

reziproken Werte der schwingenden Teile, also 1 : 2 : 3 : 4 . . . . . Nennt man die Schwingungszahl eines Grundtones **1**, so ist die der Quinte $\frac{3}{2}$ und die der dazwischen liegenden Terz, welche mit jenen beiden den harmonischen Dreiklang bildet, $\frac{6}{5}$. Nun erhält man aber diesen Bruch $\frac{6}{5}$, wenn man das Produkt von 1 und $\frac{3}{2}$ durch ihren Mittelwert $\frac{5}{4}$ teilt. Die betreffende harmonische Proportion lautet demnach $a : \frac{a+b}{2} = \frac{2ab}{a+b} : b$ und ist bereits im sechsten Jahrhundert vor unserer Zeitrechnung von Pythagoras aufgestellt. Die Zahlen der harmonischen Reihe haben die Eigenschaft, daß von drei aufeinander folgenden die mittlere stets harmonisch ist zu den beiden anderen; so ist $\frac{1}{5} = 2 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} : \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$.

Eine andere interessante unendliche Reihe stammt von Lamé: $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}, \frac{55}{34}, \frac{89}{55}$ und so fort. Sie kann bis in das Unendliche fortgesetzt werden und ihre Glieder nähern sich einem ganz bestimmten Werte, der in der Geometrie nicht nur, sondern auch in der Naturphilosophie und Aesthetik eine große Rolle spielt. Die ungeraden Nummern geben zu kleine Werte, die geraden zu große. Jedes folgende Glied hat als Zähler die Summe von Zähler und Nenner des vorhergehenden Gliedes und als Nenner den Zähler desselben. Die Division 89 : 55 ergiebt 1,618 . . . Denken wir uns nun einmal eine Linie von dieser Länge und teilen sie so, daß der kleinere Teil sich zum größeren verhält wie der größere zum Ganzen, so ist der größere Teil einen Meter lang, da 0,618 . . . : 1 = 1 : 1,618 . . . Eine derartige Teilung hat wegen ihrer hervorragenden Eigenschaften die Bezeichnung „goldener Schnitt" erhalten. Wir erwähnten bereits, daß die Seite des regelmäßigen Zehnecks der größere Abschnitt des nach dem goldenen Schnitt geteilten Halbmessers seines Umkreises ist; ebenso ist die Seite des Fünfecks der größere Abschnitt seiner stetig geteilten Diagonale und sämmtliche Diagonalen teilen sich nach dem gol-

denen Schnitt gegenseitig. Die Fig. 6 zeigt, wie eine Linie AB stetig in die Teile AE und EB geteilt wird. Man errichtet in ihrem einen Endpunkte B ein Lot gleich der Hälfte von AB, beschreibt um deren Endpunkt einen Bogen und verbindet den Mittelpunkt C mit dem Endpunkt A. Dann ist AD = AE der größere Abschnitt. Teilt man den größeren Abschnitt stetig, so erscheint der kleinere von vorher jetzt als größerer und so fort; ebenso wird der größere Abschnitt zum kleineren, wenn man ihn an die geteilte Linie anträgt.

Fig. 6.



Der Teilungscharakter ist also unzerstörbar nach dem unendlich Kleinen, wie nach dem unendlich Großen hin. Man hat in dieser Teilung das Prinzip des organischen Wachstums finden wollen. Der Leipziger Aesthetiker A. Zeising hat über diesen Gegenstand ein Werk geschrieben: „Neue Lehre von den Proportionen des menschlichen Körpers aus einem bisher unbekannt gebliebenem, die ganze Natur und Kunst durchdringendem morphologischem Grundgesetze. (Leipzig, Rudolf Weigel, 1854)“. Nach Zeising ist der menschliche Körper in der Taille, die sich als Einschnitt bemerkbar macht, stetig geteilt, so daß der Oberkörper der kleinere Abschnitt ist. Dieser wird wieder durch den Halseinschnitt stetig geteilt, wobei wieder der obere Teil (Kopf) der kleinere ist. Die Partie des Unterkörpers wird stetig geteilt unterhalb der Kniescheibe, wobei der untere Abschnitt der kleinere ist. So läßt sich die Teilung bis in die Fingerspitzen in Länge und Breite unseres Körpers und seiner Teile verfolgen und Zeising belegt seine Behauptungen durch Messungen an antiken und modernen Bildwerken und an lebenden Menschen. Er behauptet, daß stets eine befriedigende Wirkung auf unseren Gemütszustand erzielt werde, wenn irgendwo der goldene Schnitt auftrete. Unter Anderem vertritt er die Ansicht, daß zu dem Eindruck der Einheit und Totalität, den das vollendetste aller Gemälde, Raphael's Sixtinische Madonna auf uns mache, sicherlich auch der Umstand nicht wenig beitrüge, daß die Hauptabteilungen

seiner Höhe, welche durch den Scheitel der Madonna und durch die Scheitel der zur Seite befindlichen Figuren begrenzt werden, genau unserem Gesetze entsprechen. Für die Tiere, besonders das Pferd, gelangt Zeising zu ähnlichen Ergebnissen, ebenso für plastische Kunstwerke und klassische Gebäude. Manche seiner Behauptungen, besonders diejenigen bezüglich der stetigen Teilung in Musik und Poesie sind allerdings zu weitgehend und daher von zweifelhaftem Werte.

Für die pflanzlichen Organismen hat man sich das Wachstum etwa so vorzustellen. Denken wir uns einen fadenförmigen Pflanzenkörper, der ja aus Zellen besteht und an seinem Scheitel wächst, so ist der jüngste Teil, die Scheitelzelle, stets kleiner Abschnitt zur vorletzten als größerem Abschnitt, diese wieder kleinerer zu der vorhergehenden und so fort durch die ganze Reihe der Zellen bis zur ältesten. Das Breitenwachstum hat man sich ähnlich vorzustellen. Hübsche Beispiele liefern gut gewachsene Zweige und Blätter der Laubbäume. Hier kann man den goldenen Schnitt zuweilen bis in die feinsten Blattäderchen verfolgen. Selbstverständlich ist der goldene Schnitt nur ein Ideal, welches die Pflanze, da sie allerlei störenden äußeren Einflüssen unterworfen ist, selten ganz erreichen kann. Es werden die gefundenen Maßzahlen der Teile im allgemeinen Zahlen der Lamé'schen Reihe sein, die man sich daher merken möge, um draußen in der Natur Proben auf die Richtigkeit der Zeising'schen Ansichten zu machen. Die heutige Philosophie allerdings ist derartigen Theorien abhold, da die äußeren Einflüsse nicht gelegentlichen, sondern bestimmenden Einfluß haben sollen, gegen die sich die ererbte Form zu behaupten hat. Die Einführung des goldenen Schnittes in die Aesthetik ist unter dem Einfluß der Hegel'schen und Schelling'schen Philosophie erfolgt und kann wohl mit den Gesetzen der Darwin'schen Lehre kaum in Einklang gebracht werden.

Die Lamé'sche Reihe stellt nichts Anderes dar, als die Partialwerte eines Kettenbruches. Einen solchen erhält man auf folgende Weise:

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{\frac{7}{2}} = \frac{1}{3 + \frac{1}{2}} \quad \text{oder} \quad \frac{4}{13} = \frac{1}{\frac{13}{4}} = \frac{1}{3 + \frac{1}{4}}$$

Geht die Teilung nie auf, so heißt der Kettenbruch ein unendlicher; kehren von einer gewissen Stelle ab die Nenner in derselben Reihenfolge wieder, so hat man einen periodischen Kettenbruch vor sich. Der Zähler ist immer Eins. Den Anfang einer Kettenbruchentwickelung hat man bereits in den sogenannten Diametralzahlen des Theon (zweites Jahrh. n. Chr.) finden wollen. Diese Zahlen lauten: $\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29} \ldots$ Hier ist stets der Nenner gleich der Summe des vorigen Zählers und Nenners, der Zähler dagegen gleich der Summe des vorigen und des eigenen Nenners. Die Entwickelung nähert sich bei wachsender Gliederzahl immer mehr dem wahren Werte von $\sqrt{2} = 1{,}414 \ldots.$ und zwar sind die ungeraden Nummern zu klein, die geraden zu groß; doch wird die Abweichung immer geringer. Genau dasselbe ergiebt die Kettenbruchentwickelung

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 \ldots}}}}$$

Wir denken uns die an und für sich unendliche Entwickelung an irgend einer Stelle abgebrochen und so berechnet: $2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$, $\frac{5}{2}$ in 1 gleich $\frac{2}{5}$; $\frac{2}{5} + 2 = \frac{12}{5}$, $\frac{12}{5}$ in $1 = \frac{5}{12}$; $\frac{5}{12} + 2 = \frac{29}{12}$, $\frac{29}{12}$ in $1 = \frac{12}{29}$. Brechen wir hier ab und addiren die vorangestellte 1, so erhalten wir den Wert $\frac{41}{29}$, der auch zu groß ist. Es ist der fünfte Wert der obigen Diametralreihe, welche eben die Partialbrüche des Kettenbruchs für $\sqrt{2}$ enthält. Paccioli hat im Jahre 1489 zuerst eine allgemeine Vorschrift für die Kettenbruchentwickelung der Wurzeln gegeben: man scheidet aus der gegebenen Zahl die höchste Quadratzahl, die in ihr enthalten ist aus und fährt folgendermaßen fort:

$$\sqrt{A} = \sqrt{a^2 + \alpha} = a + \cfrac{\alpha}{2a + \cfrac{\alpha}{2a + \cfrac{\alpha\,..}{2a + \alpha}}}$$

Für $\sqrt{2}$ ist $a^2 = 1$ und $\alpha = 1$. Berechnen wir hiernach z. B. die Wurzel aus 5, welche beim goldenen Schnitt eine Rolle spielt:

$$\sqrt{5} = \sqrt{4 + 1} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4}}}}$$

Die Näherungswerte lauten: 2, $2\frac{1}{4}$, $2\frac{4}{17}$, $2\frac{17}{72}$ ...... Addirt man zu einem möglichst hohen Gliede der so entstehenden Reihe Eins und halbirt die Summe, so erhält man wieder das entsprechende Glied der Lamé'schen Reihe. Diese enthält die Näherungswerte folgenden Kettenbruchs

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots\ldots}}},$$

dessen schließlicher Wert = 1,618 .... ist. Nach der Definition des goldenen Schnittes besteht nämlich die Proportion $x : a = a : x - a$, welche zu der quadratischen Gleichung $x^2 - ax = a^2$ führt. Diese behandeln wir nach Euler folgendermaßen

$$x = a + \frac{a^2}{x} = a + \cfrac{a^2}{a + \cfrac{a^2}{x}} = a + \cfrac{a^2}{a + \cfrac{a^2}{a + \cfrac{a^2}{a + \ldots}}}$$

wodurch ein unendlicher Kettenbruch entstanden ist. Setzen wir $a = 1$, so findet man

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}$$

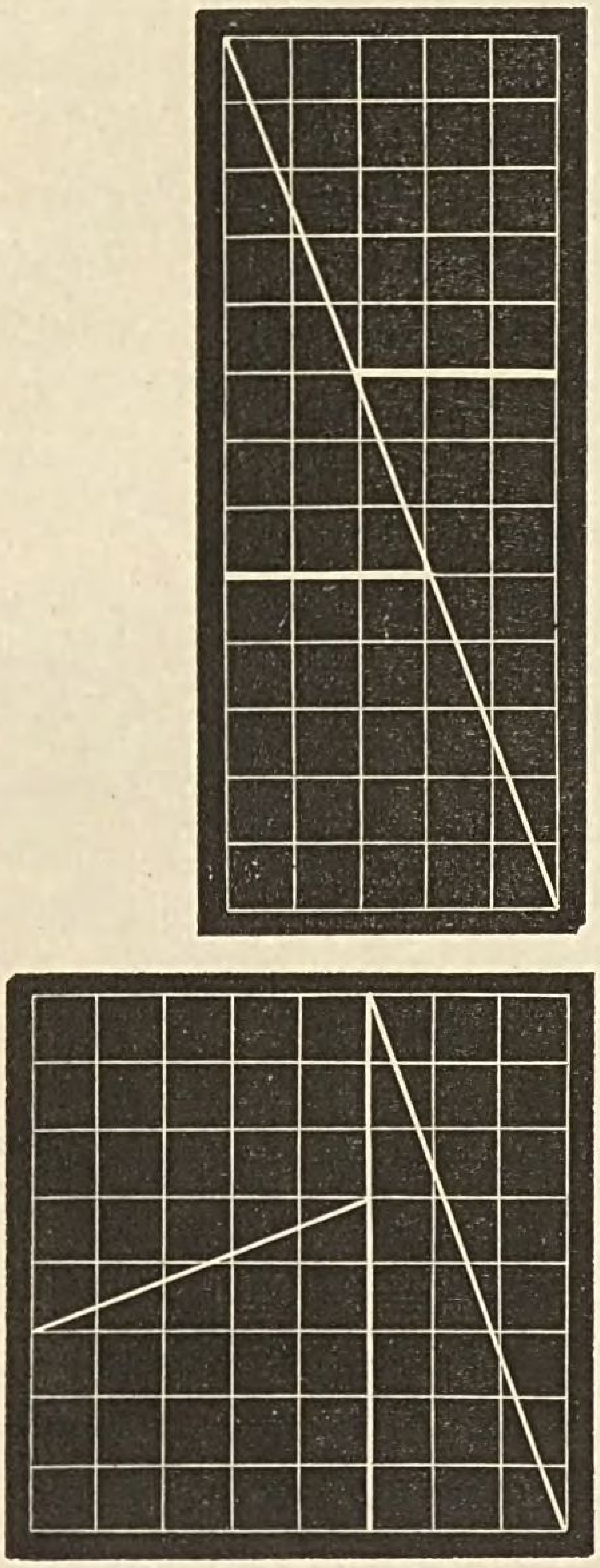
womit die Identität mit dem Endwert der Lamé'schen Reihe hergestellt ist.

Noch andere Eigenschaften haben die Glieder der Zahlenreihe 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89 u. s. f., welche der Lamé'schen Reihe entspricht. Greift man irgend drei aufeinanderfolgende Glieder heraus, so ist stets das Quadrat des mittleren um eine Einheit größer oder kleiner als das Produkt der beiden anderen. $8^2 = 5.13 - 1$, $13^2 = 8.21 + 1$ und so fort. Bildet man ferner aus irgend zwei ungeraden oder geraden Nummern der Reihe die Quotienten, so unterscheiden diese sich um so weniger von einander, je weiter man in der Reihe fortschreitet. So ist z. B. 34 : 13 = 2,615 und 21 : 8 = 2,625 und 55 : 21 = 2,618. Bildet man also aus solchen Zahlen als Katheten rechtwinkelige Dreiecke, so werden diese Dreiecke annähernd ähnlich sein, d. h. gleiche Winkel haben. Darauf beruht folgende niedliche geometrische Täuschung.

Man greife aus der Reihe drei aufeinanderfolgende Zahlen heraus, z. B. 8, 13, 21, zeichne ein Quadrat mit der Seitenlänge 13 und ein Rechteck mit den Seitenlängen 8 und 21. Ersteres wird 169 gleiche Quadrate, letzteres 168 eben solche enthalten. Man zerschneide dann das Quadrat in folgender Weise. Den einen Schnitt führe man so hindurch, daß zwei Rechtecke mit den Seiten 8 und 13 bez. 5 und 13 entstehen. Das größere derselben zerschneide man noch einmal so in zwei gleiche Trapeze, daß die Schnittlinie vom fünften Teilpunkt der längeren Seite zum achten der kürzeren geht. Das kleinere Rechteck zerschneidet man einfach längs der Diagonale. Dann enthalten die vier Teile $32\frac{1}{2}$ und 52 Quadrate paarweise und können mit den Hälften des Rechtecks 8 und 21, deren jedes 84 kleine Quadrate enthält, so zur Deckung gebracht werden, daß das eine Quadrat, welches in den vier Teilen des Quadrats mehr enthalten ist, als im Rechteck, völlig verschwunden zu sein scheint: 169 erscheint gleich 168. Die Fig. 7 bringt diese Verhältnisse für die drei Zahlen 5, 8, 13 zur Anschauung; hier enthält das Quadrat 64 (die paarigen Teile je 12 und 20 kleine Quadrate), hingegen das Rechteck 65 kleine Quadrate, deren eines also durch die Deckung zum Verschwinden gebracht wird. Die Ursache dieser Täuschung ist folgende. Die Richtung der im Quadrat geführten Schnittlinien ist annähernd dieselbe, wie die Richtung der Diagonale des Rechtecks. In dem Beispiel unserer

Figur ist z. B. diese Richtung bestimmt durch das Verhältnis der Katheten 5 und 13 (trigonometrische Tangente), welche einen Winkel von etwa 21° bilden (0,385 = tg 21°), der Schnittwinkel, welchen die beiden Dreiecke im Quadrat haben, ist bestimmt durch das Verhältnis 3 : 8 = 0,375, dessen zugehöriger Winkel 20° 35′ beträgt, während der Schnitt, welcher die beiden gleichen Trapeze ergiebt, unter einem Winkel von 21° 50′ verläuft und bestimmt wird durch das Verhältnis 2 : 5 = 0,4. Die beiden Winkel unterscheiden sich von demjenigen, mit welchem sie zur Deckung gebracht werden, um weniger als einen Grad. Ein solch geringer Richtungsunterschied ist aber erst bei größeren Längenausdehnungen der Schenkel bemerkbar. Der Erdradius ist mehr als 6366 km groß und ein Aequatorgrad ist 111 km lang, also annähernd der 60te Teil. Für eine Schenkellänge von sechs Centimeter würde demnach bei uns die Abweichung an den Enden der Schenkel erst etwa einen Millimeter betragen, ein Unterschied, der erst bei ganz genauer Betrachtung würde entdeckt werden können. Uebrigens wird der Fehler natürlich um so kleiner, je höhere Nummern die drei der Reihe entnommenen Zahlen tragen.

Fig. 7.



Hier ist der Ort, anderer rein arithmetischer Täuschungen zu gedenken, die man Sophismen zu nennen pflegt. Bekanntlich giebt die Multiplikation zweier Zahlen mit gleichen Vorzeichen stets ein positives Resultat, auch wenn das Vorzeichen der Faktoren negativ war: (— 3) × (— 3) giebt ebenso + 9 wie (+ 3) × (+ 3). Mit anderen Worten die Quadratwurzel aus einer Zahl ist zweideutig: $\sqrt{9} = \pm 3$. Hat man nun die Gleichheit zweier Quadrate, z. B.

$(8 - 5)^2 = (2 - 5)^2$, die ja beide den Wert 9 haben, so ist man leicht versucht die Regel anzuwenden: Gleiche Operationen auf beiden Seiten einer Gleichung vorgenommen, geben wieder Gleiches und sind daher gestattet. Diese Regel gilt wohl für das Addiren, Subtrahiren, Multipliziren, Dividiren und Potenziren, nicht aber für das Radiziren, da die Resultate beim Wurzelausziehen ebenso viele Deutungen oder Antworten ergeben, als der Exponent Einheiten enthält, in unserem Falle also zwei. Wir würden erhalten $8 - 5 = 2 - 5$ oder, wenn auf beiden Seiten fünf addirt wird $8 = 2$.

Die Multiplikation einer beliebigen Zahl mit sich selbst giebt also unter allen Umständen ein positives Resultat, ob die Zahl selber nun positiv oder negativ war. Die Quadratwurzel aus einer negativen Zahl ist daher ein Unding. Man hat sich aber zur Einführung einer neuen Einheit von der Form $\sqrt{-1}$ entschlossen mit dem Rechte, mit dieser Einheit genau in derselben Weise operiren zu dürfen, wie mit der bereits bekannten positiven und negativen Einheit. Der deutsche Mathematiker Gauß, welcher am Anfange dieses Jahrhunderts auf der Höhe seiner Erfolge stand, hat mit dem vollen Bewußtsein der großen Tragweite diese imaginäre Einheit benutzt und geometrisch gedeutet. Die neuen Einheiten $+\sqrt{-1}$ und $-\sqrt{-1}$ sind mit $+i$ und $-i$ bezeichnet. Sie sind von der Beschaffenheit, daß sie die negative Einheit erzeugen, wenn sie mit sich selbst multiplizirt werden. Erst nach viermaliger Multiplikation mit sich selbst erzeugen sie wieder die positive Einheit.

Verbindet man eine reelle Zahl, d. h. eine solche die aus einer Anzahl von positiven oder negativen Einheiten zusammengesetzt ist, mit einer imaginären, d. h. einer solchen, die mehrere $+i$ und $-i$ enthält, so erhält man eine komplexe Zahl, wie $7 + 5i$ oder $7 - 5i$, die ja sieben reelle und fünf imaginäre Einheiten enthalten. Die erstere ist die Summe der beiden Teile, die zweite die Differenz; sie stehen in der Beziehung, daß ihr Produkt stets eine reelle Zahl, in unserem Falle $49 + 25 = 74$ ergiebt und heißen konjugirt. Die Zahl 74 erhält man also nicht nur, wenn man die reellen Faktoren 2 und 37 multiplizirt, sondern außerdem auf mannigfache Art durch Multiplikation solcher konjugirter kom-

plexer Größen wie $(7 + 5i) \times (7 - 5i)$.[1]) So ergiebt z. B. auch $(\sqrt{10} + 8i) \times (\sqrt{10} - 8i)$ oder $(8 + i\sqrt{10}) \times (8 - i\sqrt{10})$ das Produkt 74. Es kann daher nicht Wunder nehmen, wenn die Mathematik nachgewiesen hat, daß eine beliebige Zahl auf zehn verschiedene Arten als Potenz vom zehnten Grade entstanden gedacht werden kann. Man kann sie also auch durch zehnmalige Multiplikation einer Basis mit sich selbst erhalten und es giebt zehn verschiedene Zahlen, die als Basis genommen werden können. So kann man sich z. B. die Zahl Eins als dritte oder vierte Potenz entstanden denken. In ersterem Falle kann man die Basis 1 oder $\frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$ oder $\frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})$ dreimal mit sich selbst multipliziren, worauf man jedesmal Eins erhält. Im zweiten Falle sind $+1$, -1, $+i$, $-i$ die vier Wurzeln, die durch viermalige Multiplikation mit sich selbst die Einheit erzeugen. Für höhere Potenzen sind natürlich diese Wurzeln nicht so einfach zu bestimmen. Man findet sie mit Hilfe trigonometrischer Funktionen. Die zehnte Wurzel aus einer Zahl hat also zehn verschiedene Werte, unter denen auch paarweise konjugirte komplexe Ausdrücke sich befinden. Der Exponent einer Wurzel giebt also zugleich an, wie viele verschiedene Deutungen oder Werte die Antwort hat. Diese Ergebnisse hat Gauß auf die Gleichungen höherer Grade angewendet, d. h. auf solche, in denen die Unbekannte nicht nur als x, sondern auch als x^2, x^3, x^4 u. s. f. vorkommt. Jede solche Gleichung liefert genau so viele Werte für die Unbekannte, als der höchste bei x vorkommende Exponent Einheiten enthält. Eine Gleichung vom dritten Grade stellt z. B. das delische Problem dar, dessen Lösung man im Altertum suchte und fand. Sie liefert drei Antworten, von denen freilich nur die eine reell ist und daher allein für die Praxis Bedeutung hat.

---

[1]) Die Quadratwurzeln aus negativen Zahlen erhalten eine Bedeutung zuerst bei Cardanus (um 1539). Er hatte sich die Aufgabe gestellt, durch regula falsi die Zahl 10 in zwei Summanden zu zerlegen, deren Produkt 40 ist. Er nimmt als falsum 5, zieht das Quadrat dieser Zahl von 40 ab, so sind $5 + \sqrt{-15}$ und $5 - \sqrt{-15}$ die gewünschten Teile. Bis dahin waren solche Zahlen stets als unmögliche bezeichnet. Erst mit ihrer Einführung konnte die Theorie der allgemeinen Gleichungen höherer Grade abgeschlossen werden.

Die siebente und letzte Grundoperation der Mathematik ist das Logarithmiren, welches sich, wie bereits erwähnt, als Umkehrung des Potenzirens darstellt, bei welchem der gesuchte Exponent der Logarithmus der Potenz heißt. In der Praxis hat man die Zahl Zehn als Basis zu Grunde gelegt und man entnimmt den Logarithmus der verschiedenen Zahlen einer Tabelle. Der Logarithmus von 20 ist z. B. 1,30103, d. h. $10^{1,30103}$ ist gleich 20. Um eine praktische Anwendung davon zu geben, sei erwähnt, daß man den Höhenunterschied zweier Orte in Metern dadurch finden kann, daß man am oberen und unteren Punkt das Barometer beobachtet, von den in Millimetern ausgedrückten Zahlen die Logarithmen sucht und die Differenz derselben mit 18 000 multiplizirt. Wissenschaftlich hat nicht die Zahl Zehn eine Bedeutung als Basis, sondern eine andere, welche durch die unendliche Reihe $1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots\ldots$ dargestellt wird. Sie hat den Wert 2,718 281 8284 .... und ist, wie schon oben bei den Auseinandersetzungen über die Zahl π gesagt wurde, transzendent. Ihre Bedeutung liegt darin, daß, wenn man sie auf die xte Potenz erheben will, man lediglich die sämmtlichen Glieder der unendlichen Reihe mit Ausnahme des ersten mit x, x^2, x^3 u. s. f. zu multipliziren braucht. Es ist also

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots .$$

Dadurch ist das Potenziren auf eine Multiplikation zurückgeführt und darin liegt auch die Bedeutung von e. Ein beliebiger Logarithmus zu der Basis e wird gefunden durch die Reihe

$$\log. (1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \ldots\ldots$$

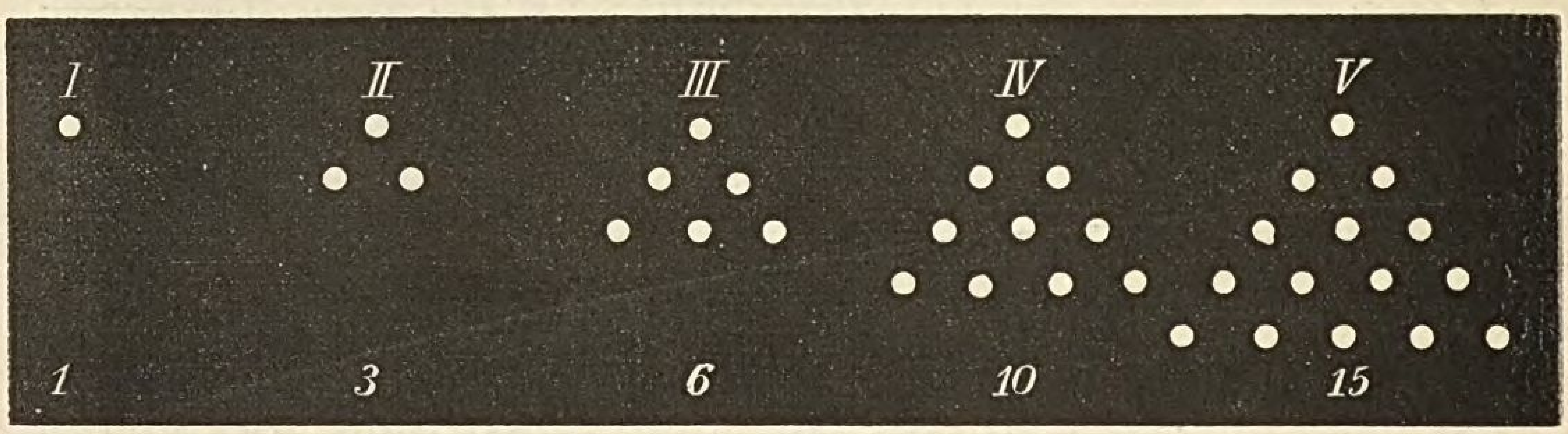
So ist $\log. 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} .. = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \cdots$

2.

Ein Zahlengebäude. (Vielecks- und Pyramidalzahlen.)

Denken wir uns Kugeln in folgender Weise übereinandergeordnet:

Fig. 8.



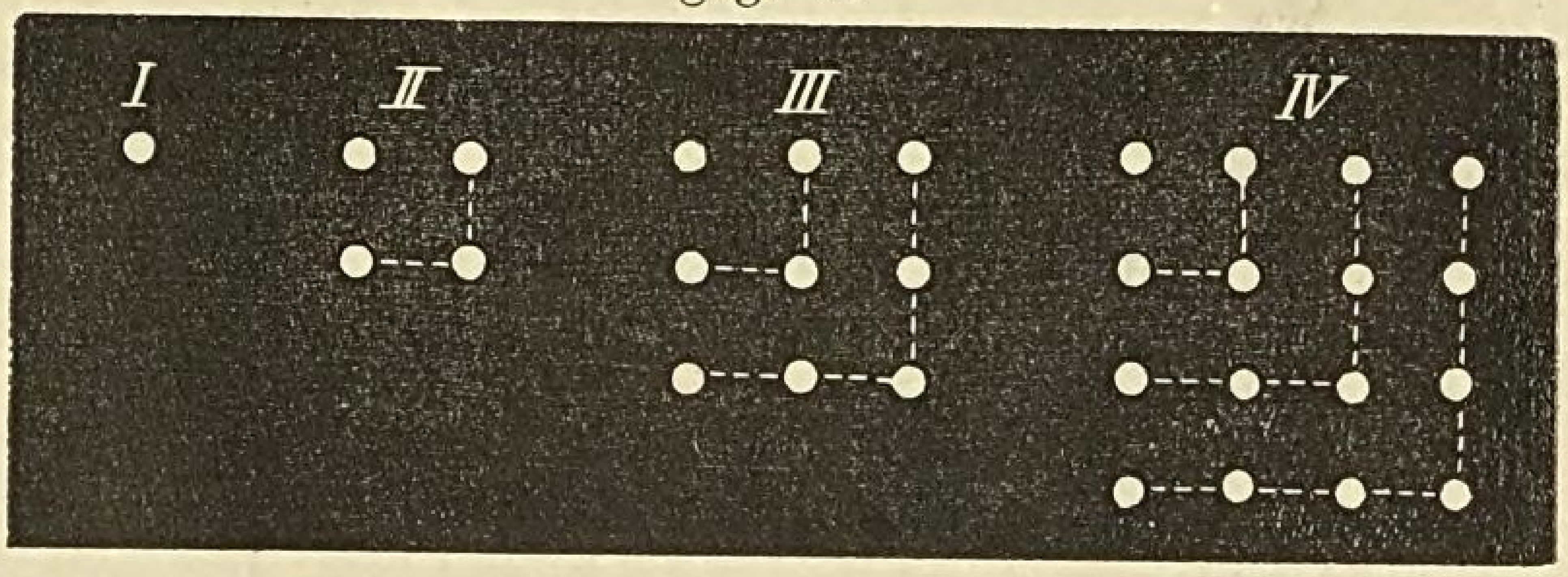
so heißen die sich ergebenden Summen der Form entsprechend Dreieckszahlen. Die erste ist gleich 1, die n-te gleich der um n vermehrten (n — 1)-sten Dreieckszahl. Darnach können alle bestimmt werden.

Einheiten:	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	....
Zahlen:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	....
Dreieckszahlen:	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	....

Legen wir an die Form V eine eben solche mit der Spitze nach unten, so erhalten wir ein Parallelogramm mit $5 \times 6 = 30$ Kugeln; ebenso würde die n-te Dreieckszahl durch Verdoppelung ein Parallelogramm von $n \times (n + 1)$ Kugeln liefern. Es ist daher $1 + 2 + 3 + \ldots n = \frac{n(n+1)}{2}$. Dieselbe Summe erhält man durch Addition der symmetrischen Paare der Zahlenreihe, nämlich $(1 + n)$, $2 + (n - 1)$, $3 + (n - 2)$ u. s. f.; jedes Paar hat die Summe $(n + 1)$ und n Zahlen bilden $\frac{n}{2}$ Paare. Das Produkt ist $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$

Wir wollen jetzt die Kügelchen wie folgt anordnen (Fig. 9): so erhalten wir lauter Quadratzahlen und es ist daher die Summe der aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen

Fig. 9.

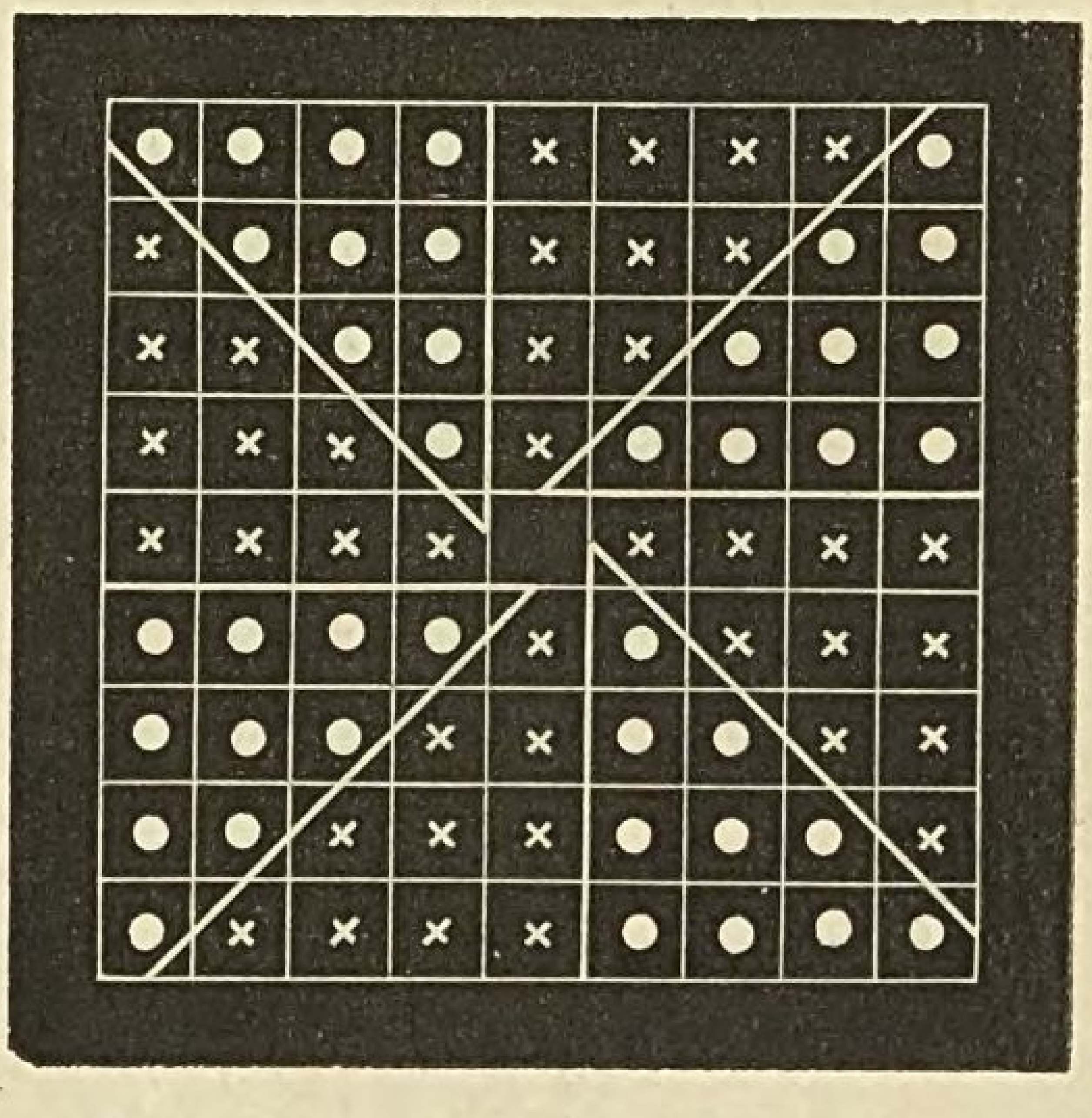


$1 + 3 + \ldots\ldots (2n - 1)$ stets gleich dem Quadrate ihrer Anzahl: n^2. Auch dieses Resultat läßt sich durch Addition von $\frac{n}{2}$ Paaren ableiten, deren jedes die Summe $2n$ hat, wenn man dem Anfang und Ende der Reihe symmetrisch Zahlen entnimmt. Die erste Viereckszahl ist gleich der Einheit: die n-te gleich der um die n-te ungerade Zahl vermehrten $(n - 1)$sten Viereckszahl.

Einheiten:	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	...
Ungerade Z.:	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	...
Viereckszahlen:	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	...

Die Fig. 10 deutet einen Zusammenhang zwischen Dreiecks- und Viereckszahlen an. Das Achtfache der vierten Dreieckszahl vermehrt um eine Einheit (in der Mitte) giebt die neunte Viereckszahl. Nimmt man demnach eine beliebige Quadratzahl, vermindert sie um eine Einheit und nimmt den achten Teil davon, so erhält man stets eine Dreieckszahl. Will man die zehnte Dreieckszahl haben, so bilde man $(2 \times 10 + 1)^2 = 21^2 = 441$, ziehe 1 ab und bilde $440 : 8 = 55$. Eine nähere Betrachtung zeigt uns auch, daß eine Quadratzahl nie auf 2, 3, 7, 8 endigt, eine Dreieckszahl nie auf 2, 4, 7, 9.

Fig. 10.



Legt man zwei aufeinanderfolgende Dreieckszahlen entsprechend aneinander, so bekommt man ein Quadrat. In der That ist $10 + 15 = 25$. Jedes Quadrat ist also gleich der Summe zweier

Dreieckszahlen, nämlich derjenigen von derselben Ordnung und von der vorhergehenden. Man kann dies auch so ausdrücken: Jedes Quadrat ist gleich dem Doppelten der vorhergehenden Dreieckszahl vermehrt um seine Ordnungszahl, da $n^2 = n(n-1) + n$ ist.

Es macht nun keine Schwierigkeit, sich die höheren Viereckszahlen, sei es figürlich, sei es zahlenmäßig, abzuleiten. Die Tabelle der Fünfeckszahlen ist folgende:

Einheiten:		3	3	3	3	3	3	3	3	3	...
Differenzreihe:	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28	...
Zahlen:	1	5	12	22	35	51	70	92	117	145	...

Fig. 11 und 12 stellen die fünfte Fünfeckszahl dar und gestatten verschiedene Zerlegungen.

Fig. 11.

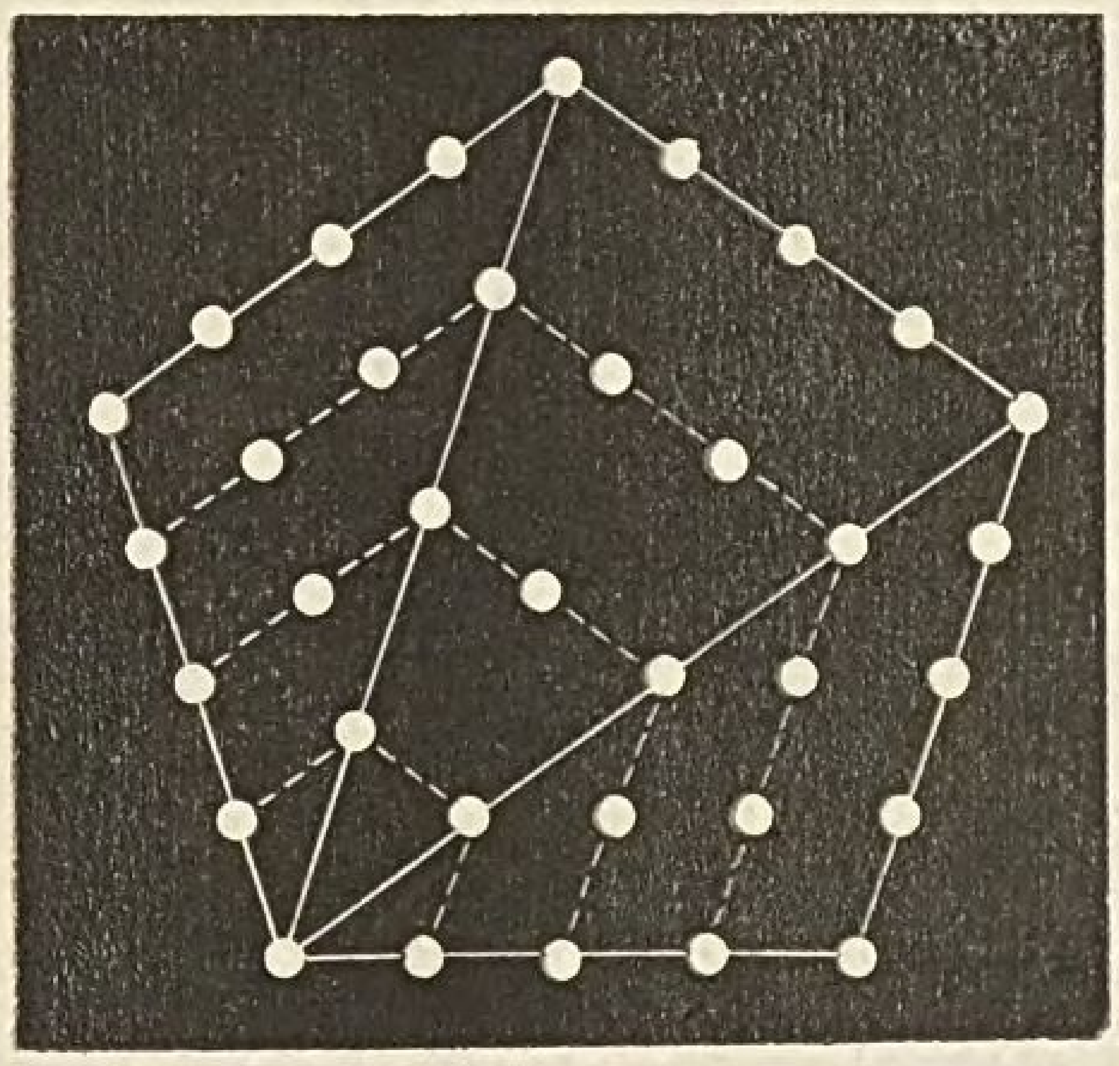
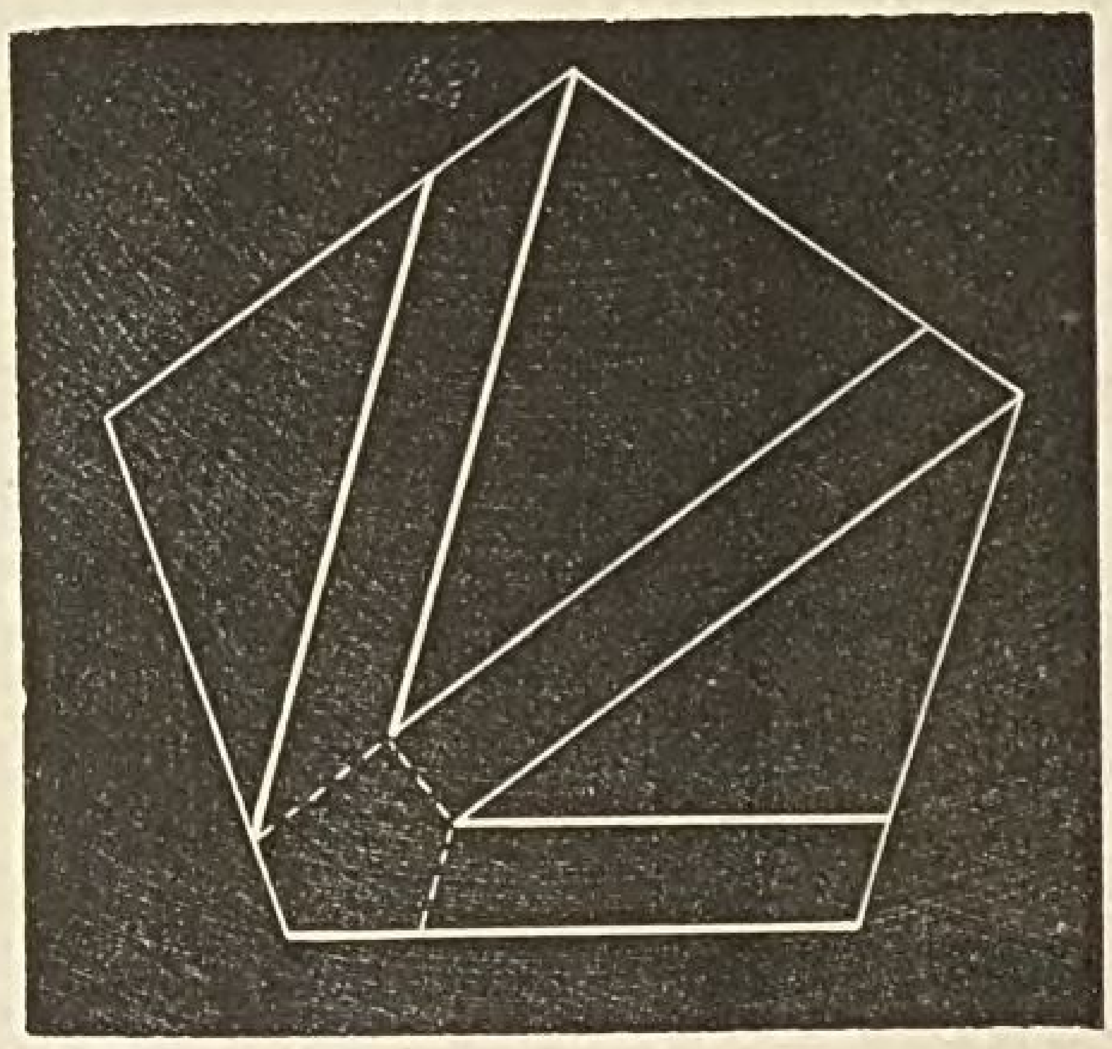


Fig. 12.



Die fünfte Zahl ist von unten links aus gebildet aus $1 + 4 + 7 + 10 + 13 = 35$; sie besteht nach Fig. 12 aus der dreifachen vierten Dreieckszahl vermehrt um die fünf Kugeln der untersten Reihe. Allgemein: die n-te Fünfeckszahl ist gleich ihrer Seite n vermehrt um das Dreifache der vorhergehenden, also (n — 1)sten Dreieckszahl, oder: gleich der Quadratzahl von derselben Ordnung vermehrt um die Dreieckszahl der vorhergehenden. So ist die zehnte Fünfeckszahl $= 10 + 3 \times 45 = 100 + 1 \times 45 = 145$. Man beachte übrigens auch folgendes Bildungsgesetz:

1	$5 + 6 + 7 + 8 + 9$
$2 + 3$	$6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11$
$3 + 4 + 5$	$7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13$
$4 + 5 + 6 + 7$	$8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15$

Die n-te Pentagonalzahl ist gleich der Summe der n ersten Glieder der auf n folgenden Zahlenreihe, also

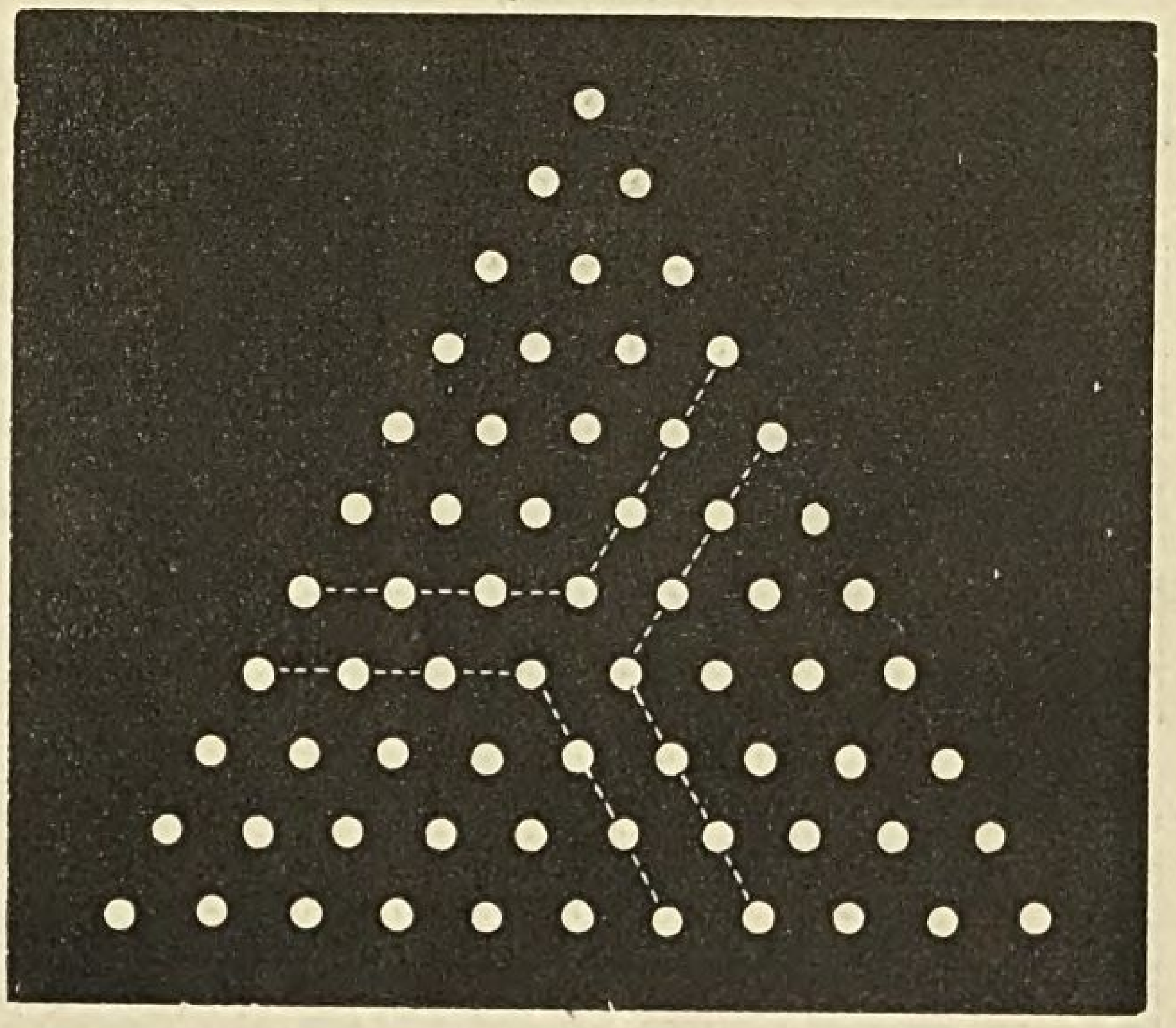
$$n \quad n+1 \quad n+2 \quad \ldots\ldots \quad 2n-1 \quad = \frac{n}{2}(3n-1).$$

Hierauf beruht ihre geometrische Darstellbarkeit als Trapeze, von der nachher die Rede sein wird.

Unsere bisherigen Ergebnisse gestatten bereits den Schluß, daß jede Polygonalzahl durch jede andere und eine Dreieckszahl sich darstellen läßt. Die n-te p-Eckzahl ist gleich der n-ten (p — 1)-Eckzahl vermehrt um die Dreieckszahl der vorhergehenden Ordnung oder gleich der n-ten (p — 2)-Eckzahl vermehrt um die 2fache Dreieckszahl der vorhergehenden Ordnung oder gleich der n-ten (p — x)-Eckzahl vermehrt um die x-fache Dreieckszahl der vorhergehenden Ordnung. So ist die n-te Zehneckszahl z. B. gleich der n-ten Sechseckszahl vermehrt um die vierfache Dreieckszahl der vorhergehenden Ordnung oder auch gleich der Zahl n vermehrt um die neunfache Dreieckszahl der vorhergehenden Ordnung.

Die Fig. 13 beantwortet die Frage, wie man erkennen kann, ob eine Zahl Fünfeckszahl ist. Die elfte Dreieckszahl zerfällt in drei Pentagonalzahlen vierter Ordnung. Jedes Dreifache einer Pentagonalzahl ist eine Dreieckszahl von dreimal so hoher Ordnung weniger Eins (3 n — 1), wovon man sich durch Vergleich der beiden obigen Tabellen überzeugen kann.

Fig. 13.



Wir haben vorhin gesehen, daß das Achtfache einer n-ten Dreieckszahl vermehrt um die Einheit eine Quadratzahl vom Range (2 n + 1) giebt; es ist daher auch das Vierundzwanzigfache einer n-ten Pentagonalzahl vermehrt um eine Einheit gleich einem Quadrat von der Ordnung (6 n — 1). So ist z. B. 24 (4 + 5 + 6 + 7) + 1

$= (6 \times 4 - 1)^2 = 23^2 = 529$ und umgekehrt $(6 \times 2 - 1)^2 = 11^2 = 121 = 24\,(2 + 3) + 1$. Dem Mathematiker Diophant im vierten Jahrhundert nach Christi Geburt ist dieser Satz bereits bekannt gewesen.

Fig. 14.

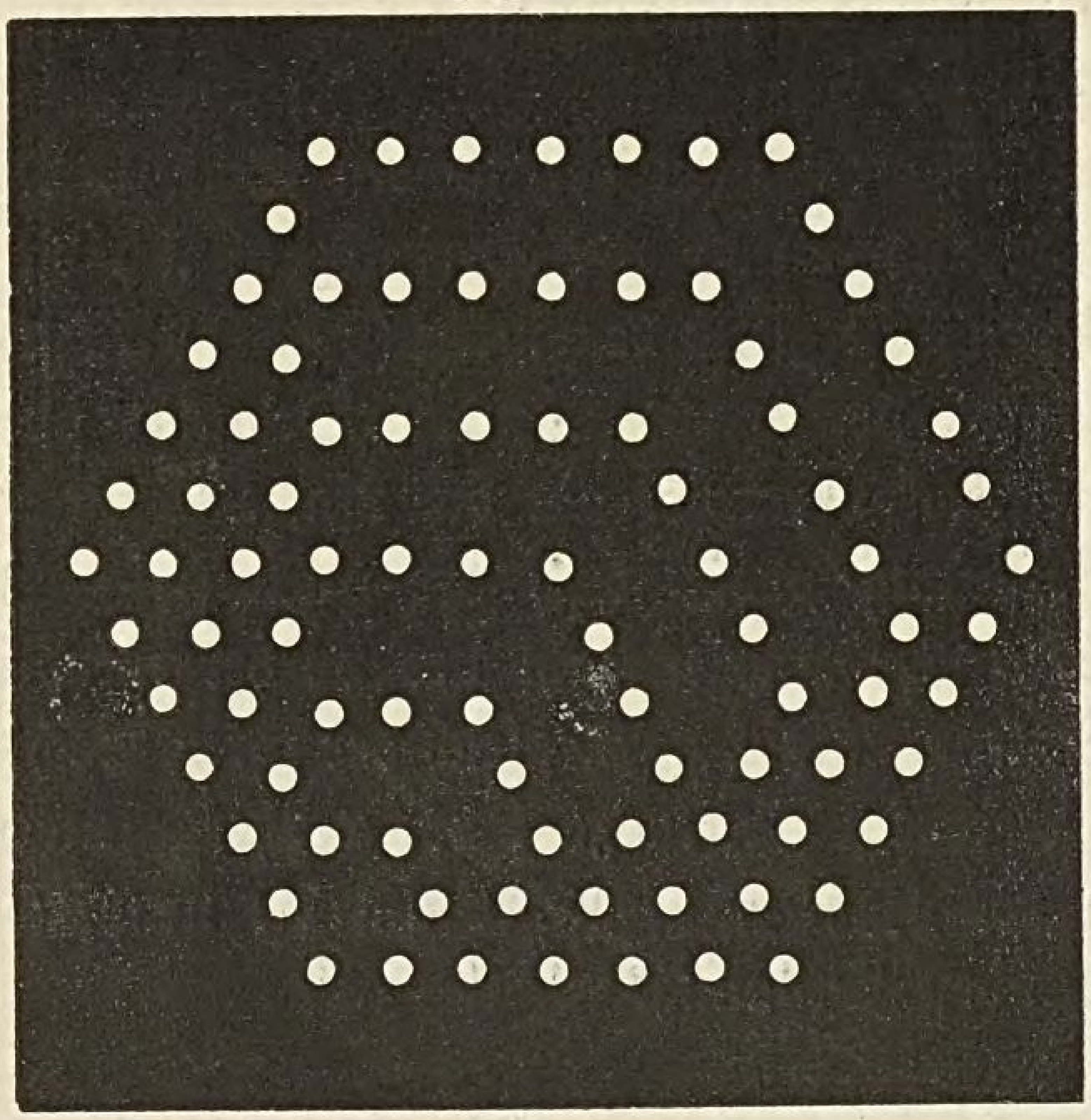


Fig. 15.

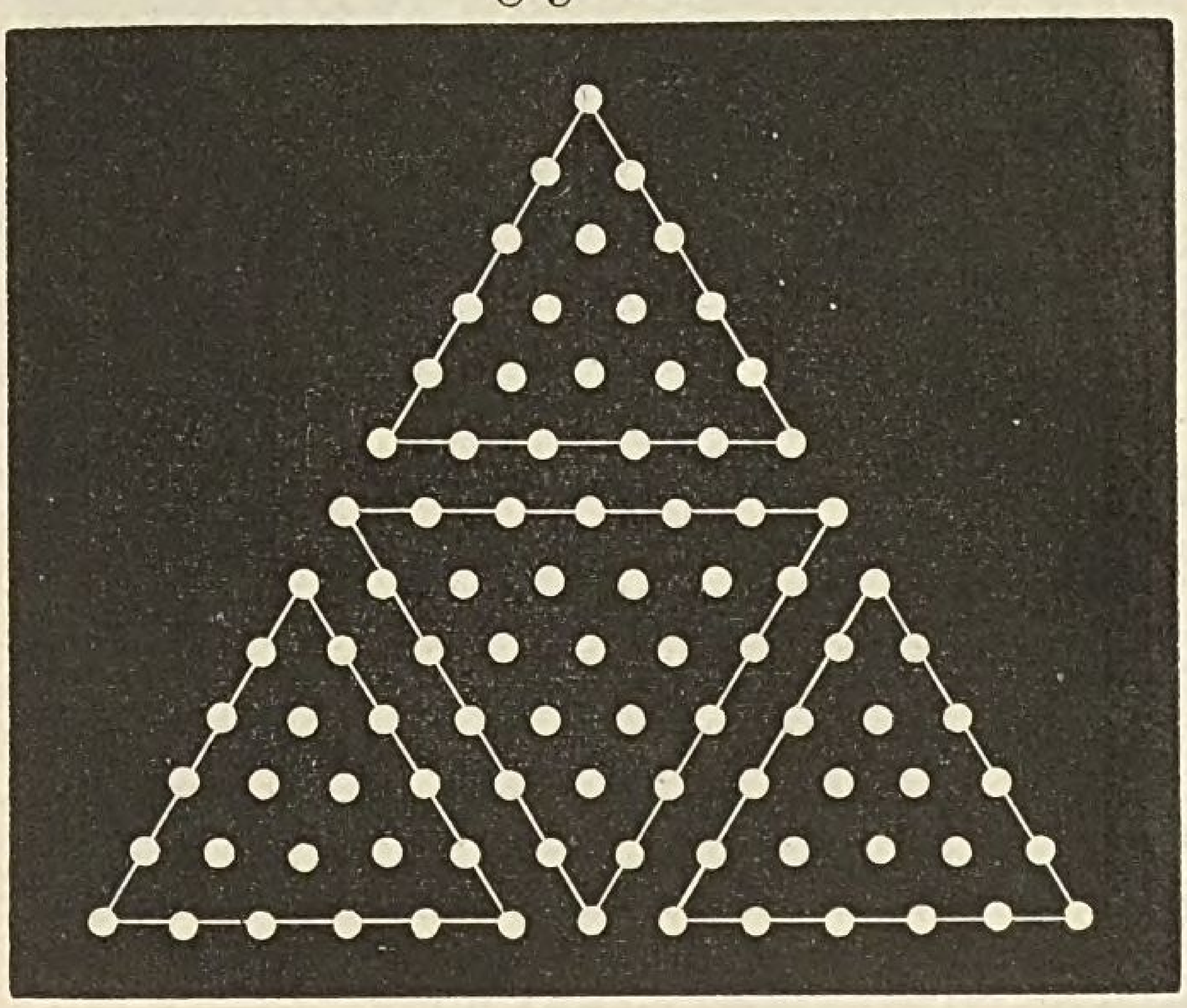


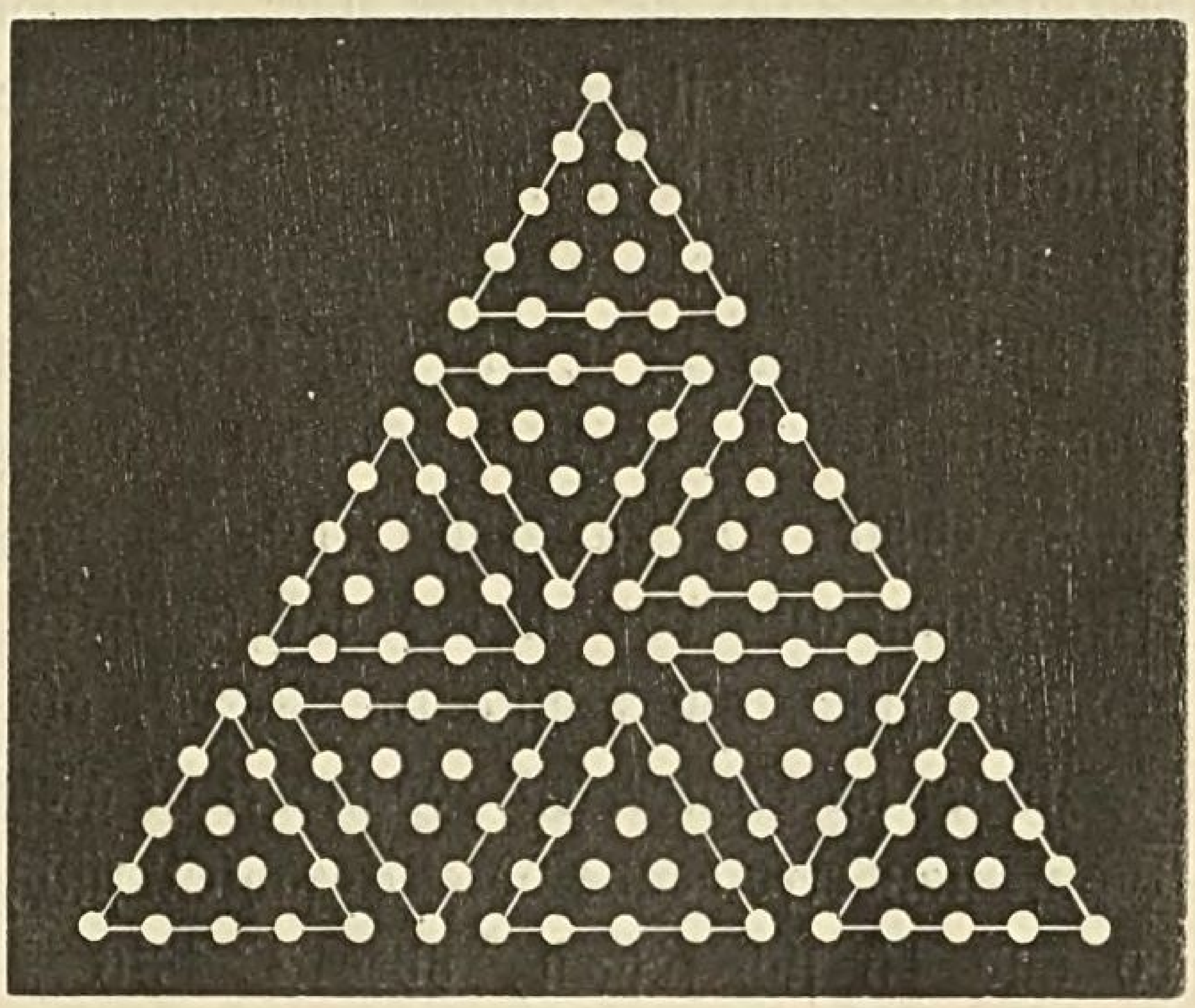
Fig. 14 enthält die siebente Sechseckszahl $= 1 + 5 + 9 + 13 + 17 + 21 + 25 = 91$. Nach unserem früheren Ergebnis ist aber diese Sechseckszahl gleich der Dreieckszahl gleicher Ordnung vermehrt um das dreifache der vorhergehenden. In der That ist $91 = 28 + 3 \times 21$. Nun lassen sich diese Dreieckszahlen aber so aneinanderlegen, wie Fig. 15 zeigt, daß sie die dreizehnte Dreieckszahl bilden. Diese Umformung läßt sich mit jeder Sechseckszahl vornehmen. Man bekommt die Sechseckszahlen, wenn man die Dreieckszahlen von ungerader Ordnung heraussucht: die erste, dritte, fünfte u. s. f. Dreieckszahl ist zugleich die erste, zweite, dritte u. s. f. Sechseckszahl. Mit Hilfe des oben benutzten Zahlenschemas kann man sämmtliche Vieleckszahlen bilden. In die erste Reihe kommt die Seitenzahl weniger Zwei des Vierecks, in die zweite die stets mit 1 beginnende Differenzreihe, in die dritte die Vieleckszahlen selber.

So ist die folgende Tabelle gebildet:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Dreieck . . .	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78
Viereck . . .	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144
Fünfeck . . .	1	5	12	22	35	51	70	92	117	145	176	210
Sechseck . .	1	6	15	28	45	66	91	120	153	190	231	276
Siebeneck. .	1	7	18	34	55	81	112	148	189	235	286	342
Achteck . . .	1	8	21	40	65	96	133	176	225	280	341	408
Neuneck . .	1	9	24	46	75	111	154	204	261	325	396	474
Zehneck. . .	1	10	27	52	85	126	175	232	297	370	451	540
Differenzen:	0	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66

Für die Achteckszahlen läßt sich folgendes Gesetz aussprechen: Ihr Dreifaches vermehrt um Eins giebt ein Quadrat, dessen Seite das Dreifache vermindert um Eins der Achteckszahl ist. So giebt die fünfte Achteckszahl: $3 \times 65 + 1 = 196$ und dies ist das Quadrat von $3 \times 5 - 1 = 14$. Da eine Quadratzahl, wie wir gesehen haben, nie auf 2, 3, 7, 8 endigt, so kann in Folge des erwähnten Zusammenhanges eine Achteckszahl nie auf 7, 4, 2, 9 endigen. Denn es ist: $3 \times 7 + 1 = 22$, $3 \times 4 + 1 = 13$, $3 \times 2 + 1 = 7$, $3 \times 9 + 1 = 28$. Die Umkehrung jenes Satzes lautet: „Vermindert man ein Quadrat um Eins, so ist der dritte Teil, falls kein Rest bleibt, eine Achteckszahl. Aus der Fig. 16 sehen wir, daß das Neunfache einer Dreieckszahl vermehrt um Eins wieder eine Dreieckszahl ist. Die fünfte Dreieckszahl ist 15; ihr Neunfaches 135; daher ist 136 wieder eine Dreieckszahl und zwar die $3 \times 5 + 1 = 16$te. In der That ist $16 \times 17 : 2 = 136$. Aus der Tabelle können wir weitere Beispiele bilden. Die

Fig. 16.



n-te Dreieckszahl ergiebt durch diese Bildung die $(3n+1)$-ste. Legen wir die Fig. 13 an eine Dreieckszahl zehnter Ordnung, die sich, wie eben gezeigt ist, in neun Dreieckszahlen dritter Ordnung $+ 1$ zerlegen läßt, so ist die Summe $66 + 55$ eine Quadratzahl ($11^2 = 121$. Das Dreifache einer Fünfeckszahl und das Neunfache einer Dreieckszahl von vorhergehender Ordnung $+ 1$ ist also immer ein Quadrat. So ist die Fünfeckszahl siebenter Ordnung $= 70$, ihr Dreifaches $= 210$, die vorhergehende sechste Dreieckszahl 21, ihr Neunfaches $+ 1 = 190$: beider Summe 400 ist das Quadrat von 20. Umgekehrt läßt sich jedes Quadrat, nachdem es um Eins vermindert ist, in zwei Summanden zerlegen, deren einer das Dreifache einer Fünfeckszahl n-ter Ordnung, deren anderer das Neunfache einer Dreieckszahl $(n-1)$-ster Ordnung ist, vorausgesetzt, daß das Quadrat von der Ordnung $(3n-1)$ ist. Also nur die Quadrate von 2, 5, 8, 11, 14 und so fort sind benutzbar und daher durch Drei theilbar, wenn man sie um Eins vermindert. Durch Einblick in die Tabelle oder durch Zeichnung der entsprechenden Figur überzeuge man sich schließlich von der Richtigkeit folgenden Satzes: Das Doppelte einer Zehneckszahl vermehrt um eine Einheit giebt eine Dreieckszahl vom vierfachen Range weniger Zwei $(4n-2)$. Vermindert man also die zweite, sechste, zehnte und so fort Dreieckszahl um Eins und nimmt die Hälfte vom Rest, so erhält man die sämmtlichen Zehneckszahlen.

Wir wollen nun an der Hand der Tabelle die Frage entscheiden, wie oft eine gegebene Zahl Vieleckszahl ist. Man teile die betreffende Zahl der Reihe nach durch die Dreieckszahlen und sehe nach, ob der Rest die dem Teiler vorhergehende Dreieckszahl ist. Bejahenden Falles kommt jene Zahl in der Tabelle vor. Teilen wir 100 durch die Dreieckszahlen 1, 3, 6 ...., so ergeben die Teilungen durch 3, 6, 15, 21, 28, 36, 45 .... zwar einen Rest, aber nur bei 3, 15, 36 erhalten wir einen Rest, der zugleich die vorhergehende Dreieckszahl 1, 10, 28 darstellt. Dreimal und nicht öfter kommt also 100 in der vollständigen Tabelle der Vieleckszahlen vor und zwar als zehnte im Viereck, als vierte im Sechzehneck und als zweite im Hunderteck. Hundert ist gleich $33 \times 3 + 1$, wo 1 und 3 aufeinanderfolgende Dreieckszahlen sind, oder $6 \times 15 + 10$, wo 10 und 15 sich folgen, oder $2 \times 36 + 28$, wo für 28 und 36 dasselbe gilt. Auf dieselbe Art können wir feststellen, daß 111 nur

als zweite Hundertelfeckszahl vorkommen kann, da die geforderte Zerlegung nur einmal möglich ist, nämlich $18 \times 6 + 3$. Umgekehrt kann man natürlich beliebig viele Polygonalzahlen bilden, wenn man zu einer beliebigen Dreieckszahl ein beliebiges Vielfaches der folgenden Dreieckszahl addirt. Die senkrechten Kolonnen der obigen Tabelle sind arithmetische Reihen, deren Differenz gleich der vorhergehenden Dreieckszahl ist.

Im Anschluß an die Vieleckszahlen mag noch die Bemerkung stattfinden, daß man mit Hilfe vollständiger Quadrattafeln jede Multiplikation zweier Zahlen durch eine Subtraktion zweier Zahlen aus der Tabelle erledigen kann. Es ist nämlich $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ und $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$: ihre Differenz daher 4ab. Handelt es sich also z. B. darum, das Produkt 18×29 zu erhalten, so ersehe man aus der Tabelle $(18 + 29)^2 = 2209$ und $(29 - 18)^2 = 121$; den Rest 2088 theile man durch 4, so ist 522 das gesuchte Produkt. Im ersten Abschnitt ist darauf hingewiesen, daß wir mit den Logarithmen der Zahlen Aehnliches erreichen. Doch hat man noch im siebzehnten Jahrhundert, als durch Jost Bürgi und Neper die Logarithmen erfunden waren, Multiplikationen mit Hilfe von Quadrattafeln ausgeführt, die unter Umständen bis zur Zahl 200 000 gingen. Der englische Mathematiker Sylvester, welcher kürzlich starb, hat 1854 eine allgemeine Formel aufgestellt, durch welche sich das Produkt beliebig vieler Zahlen in eine Summe von Potenzen ebenso hohen Grades, als Faktoren vorhanden sind, verwandeln läßt.

Schichtet man Kugeln so aufeinander, daß jede folgende Schicht eine um eine Einheit kürzere Seite hat, als die vorhergehende und setzt das bis zur Einheit fort, so erhält man Pyramiden, die man dreiseitige, vierseitige und so fort nach der Zahl der in einer Schicht vorkommenden Seiten nennt. Bereits den Indern war die Zahl der in einer solchen Pyramide befindlichen Kugeln bekannt. Zur Veranschaulichung des Bildungsgesetzes bediente man sich vierkantiger Stäbchen, die sich ja in der That bequemer aufeinanderschichten lassen, als Kugeln. Der Araber Abu-Bekr hat etwa um das Jahr 1000 ein Werk Al Fakhrî geschrieben, welches die Fig. 17 enthält. In der links unten beginnenden Diagonalrichtung befinden sich die Quadrate der aufeinanderfolgenden Zahlen und jedes wird nach

oben und nach links flankirt von Rechtecken, deren Summe Vielfache der Quadrate sind. Vereinigt man die Zahlen der Rechtecke mit der betreffenden Quadratzahl, so bekommt man die dritten Potenzen (Kuben) der aufeinanderfolgenden Zahlen. Denkt man sich über

Fig. 17.

5	10	15	20	**25**
4	8	12	**16**	20
3	6	**9**	12	15
2	**4**	6	8	10
1	2	3	4	5

den Rechtecken Bausteine von der Höhe Eins, so erhält man in der Diagonale wirkliche Würfel, wenn man die rechteckigen Steine auf die zugehörigen quadratischen aufbaut. Denn es ist $2 + 2 + 4 = 8 = 2^3$, $3 + 3 + 6 + 6 + 9 = 27 = 3^3$ und so fort. Da nun die ganze Figur das Quadrat von $1 + 2 + 3 + 4 + 5$ darstellt, so ist offenbar $(1 + 2 + 3 + 4 + 5)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3$. Dieser Satz gilt natürlich für eine beliebige Anzahl aufeinanderfolgender Zahlen und lautet daher allgemein: Das Quadrat aus der Summe der mit Eins beginnenden Zahlen ist gleich der Summe ihrer dritten Potenzen.

Denkt man sich von einer Pyramide zuerst die oberste Schicht, dann die beiden obersten, darauf die drei obersten und so fort abgehoben, so stellen die entsprechenden Zahlen dieser Schichtenkomplexe die Pyramidalzahlen dar. Man kann sie sehr einfach durch auf-

einanderfolgende Addition der Vieleckszahlen, da ja jede Schicht eine Vieleckszahl darstellt, erhalten. Zum Beispiel:

Dreieckszahlen:	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66
Pyramide:	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286
Viereckszahlen:	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121
Pyramide:	1	5	14	30	55	91	140	204	285	385	506
Fünfeckszahlen:	1	5	12	22	35	51	70	92	117	145	176
Pyramide:	1	6	18	40	75	126	196	288	405	550	726
Sechseckszahlen:	1	6	15	28	45	66	91	120	153	190	231
Pyramide:	1	7	22	50	95	161	252	372	525	715	946

Wir wollen jetzt zum Schluß eine Methode entwickeln, durch welche wir in den Stand gesetzt werden für eine beliebig hohe Pyramide sofort die Anzahl der Kugeln zu finden, ohne die vorhergehenden kleineren Pyramiden erst berechnen zu müssen. Dazu bedürfen wir eines Satzes aus der Raumgeometrie, nach welchem jedes Prisma in drei gleiche Pyramiden zerfällt. Wir können demnach drei gleiche vierseitige Pyramiden zu einem Prisma aneinanderfügen. Erinnern wir uns, daß zwei gleiche Dreieckszahlen sich zu einem Parallelogramm vom Inhalt $n \times (n + 1)$ zusammenlegen lassen, so wird man sich klar machen können, daß drei gleiche Pyramiden über dem Parallelogramm $n \times (n + 1)$ ein Prisma mit den Seiten n, $(n + 1)$ und $(n + 2)$ bilden. Demnach ist der Inhalt einer solchen Pyramide der dritte Teil des Prismainhalts und da jede Schicht derselben aus zwei gleichen Dreieckszahlen besteht, so ist der Inhalt derjenigen Dreieckspyramide, in deren unteren Schicht an jeder Seite n Kugeln liegen, der sechste Teil des Prismainhalts. Dieser ist aber gleich dem Produkt der Seiten und daher der Inhalt der Dreieckspyramide $= \frac{1}{6} n \times (n + 1) \times (n + 2)$. Ist z. B. die Zahl der in jeder Basisseite liegenden Kugeln 100, so enthält die vollständige Pyramide $\frac{1}{6} \times 100 \times 101 \times 102 = 171\,700$ Kugeln.

Mit Hilfe dieser Formel können wir nun auch die Pyramiden mit höherer Seitenzahl berechnen, da wir ja nach unseren früheren Ergebnissen jede Schicht stets auf eine Dreieckszahl zurückführen

können. Da jede Viereckszahl gleich der Summe der entsprechenden und der vorhergehenden Dreieckszahl ist, so ist die Pyramide

$$P_4 = \frac{1}{6} n \times (n + 1) \times (n + 2) + \frac{1}{6} (n - 1) \times n \times (n + 1)$$

$$= \frac{1}{6} n \times (n + 1) \left[n + 2 + n - 1 \right] = \frac{1}{6} n \times (n + 1) \times (2n + 1)$$

Liegen in der unteren Schicht an jeder Seite 100, also im Ganzen 10 000 Kugeln, so ist die Summe aller Kugeln $\frac{1}{6} \times 100 \times 101 \times 201 = 338\,350$.

Jede Fünfeckszahl ist gleich der Quadratzahl gleicher Ordnung vermehrt um die vorhergehende Dreieckszahl. Dasselbe muß auch für die Fünfeckspyramide gelten, also

$$P_5 = \frac{1}{6} \times n (n + 1) (2n + 1) + \frac{1}{6} \times (n - 1) \times n (n - 1)$$

$$= \frac{1}{6} \times n \times (n + 1) \left[(2n + 1) + (n - 1) \right] = \frac{1}{6} \times n (n + 1) \times 3n$$

$$= \frac{1}{2} n^2 (n + 1).$$

Für die Seitenzahl 100 ergiebt sich demnach hier die beträchtliche Summe 505 000, mehr als eine halbe Million.

Die Sechseckszahl ist stets gleich der Fünfeckszahl gleicher Ordnung vermehrt um die vorhergehende Dreieckszahl. Dasselbe findet für die Pyramiden statt, deren einzelne Schichten ja jene Zahlen darstellen. Es ist demnach

$$P_6 = \frac{1}{2} n^2 \times (n + 1) + \frac{1}{6} (n - 1) \times n \times (n + 1)$$

$$= \frac{1}{6} n \times (n + 1) \left[3n + n - 1 \right] = \frac{1}{6} \times n \times (n + 1) (4n - 1)$$

Für die Seitenzahl 100 ergeben sich 671 650 Kugeln. Natürlich bilden diese Pyramidalzahlen gleicher Ordnung ebenso wie früher die Polygonalzahlen gleicher Ordnung arithmetische Reihen, d. h. aufeinanderfolgende Zahlen haben stets denselben Unterschied. So haben, wie die obigen Tabellen zeigen, die Pyramidalzahlen erster Ordnung die Differenz Null, da sie sämmtlich 1 sind. In den folgenden Ordnungen betragen die Unterschiede der Reihe nach 1, 4, 10, 20,

35, 56 .... und so fort. Diese Reihe sind aber die Pyramidalzahlen des Dreiecks und es ist daher jede Pyramidalzahl gleich der entsprechenden Dreieckspyramidalzahl vermehrt um ein Vielfaches der vorhergehenden. Dieser Satz entspricht genau demjenigen für die Polygonalzahlen und giebt uns daher wieder das Mittel an die Hand, zu entscheiden, ob bez. wie oft eine beliebige Zahl als Pyramidalzahl vorkommt. Man teilt diese Zahl durch die aufeinanderfolgenden Dreieckspyramidalzahlen und bildet die Reste. Sobald man einen Rest erhält, der gleich der dem Teile vorhergehenden Pyramidalzahl ist, kann man schließen, daß jene Zahl als Pyramidalzahl vorkommt.

Bis hierher hat uns bei dem Aufbau der Zahlen getreulich die räumliche Anschauung geleitet; zuerst die Linie, in welcher die Kugeln lagen, darauf die Ebene, endlich der Raum. Nichts hindert uns, neue höhere Zahlenreihen analog den früheren zu bilden; jedoch ist es nicht möglich, die gewonnenen Zahlenergebnisse räumlich vorzustellen und mit dem Mangel der Anschauung vermindert sich auch naturgemäß das Interesse. Die vierte Dimension blieb dem Menschen versagt; hätten wir sie, so könnten wir die folgende Tabelle anschaulich deuten:

Dreieckspyramide:	1	4	10	20	35	56	84	120	165	....
Vierte Dimension:	1	5	15	35	70	126	210	330	495	....

Die Zahlen der zweiten Reihe wären dann die Dreieckspyramidalzahlen des Raumes von vier Dimensionen. Die Schichten dieser „Pyramide" sind Pyramiden des dreidimensionalen Raumes. Wir können wieder die Tabelle für höhere Pyramiden dieser Art erweitern und ähnliche Formeln und Sätze, wie vorhin, für sie ableiten. Arithmetisch hat der Bau keine Grenze.

3.

Die magischen Quadrate.

Kaum ein anderes Problem ähnlicher Art hat die Aufmerksamkeit und das Studium der Mathematiker so sehr herausgefordert, als das der „magischen Quadrate". Ihr Ursprung ist sehr alt. Von den Indern weiß man, daß sie Täfelchen mit diesen Quadraten als Amulette um den Hals getragen und als Schutzmittel gegen Krankheiten und Bezauberungen gebraucht haben. Auch die Egypter haben sie gekannt und die Pythagoräer glaubten ihre Kraft zu stärken, wenn sie gewisse Quadrate den damals bekannten Planeten, sowie der Sonne und dem Monde widmeten. Vom wissenschaftlichen Standpunkte aus bilden sie kein aus dem Gange der Mathematik oder aus den Bedürfnissen der Praxis heraus sich ergebendes Problem. Sie bieten dem Mathematiker lediglich Interesse dar vom zahlentheoretischen Standpunkte aus, dem Laien aber, der sich für solche Probleme interessirt, ein reiches Feld für Verstand und Geduld übende Thätigkeit und sind in der That ein beachtenswertes Stück aus dem geheimnißvollen Gebiete der Zahlen. Wir wollen daher aus der großen Fülle des Stoffes Einiges auswählen, soweit es den gebildeten Leser, der die Bildungsweise solcher Quadrate kennen lernen will, interessiren kann.

Das ursprüngliche Zauberquadrat enthält in Quadratform auf quadratischen Feldern die Zahlen von 1 bis n^2 derart, daß jede horizontale, vertikale und diagonale Reihe dieselbe Summe $\frac{1}{2} n (n^2 + 1)$ ergiebt. Wir haben bereits (Seite 30) gezeigt, daß und warum die Summe der ersten a-Zahlen $\frac{1}{2} a (a + 1)$ beträgt. Die

Summe aller n^2 aufeinanderfolgenden Zahlen würde demnach $\frac{1}{2} n^2 (n^2 + 1)$ sein; da wir aber n-Reihen mit gleicher Summe haben, so muß die Summe jeder Reihe $\frac{1}{2} n (n^2 + 1)$ sein. Beginnen wir mit dem kleinsten Quadrat, welches möglich ist, so würden wir aus den vier ersten Zahlen folgende Zusammenstellungen bilden:

Fig. 18.

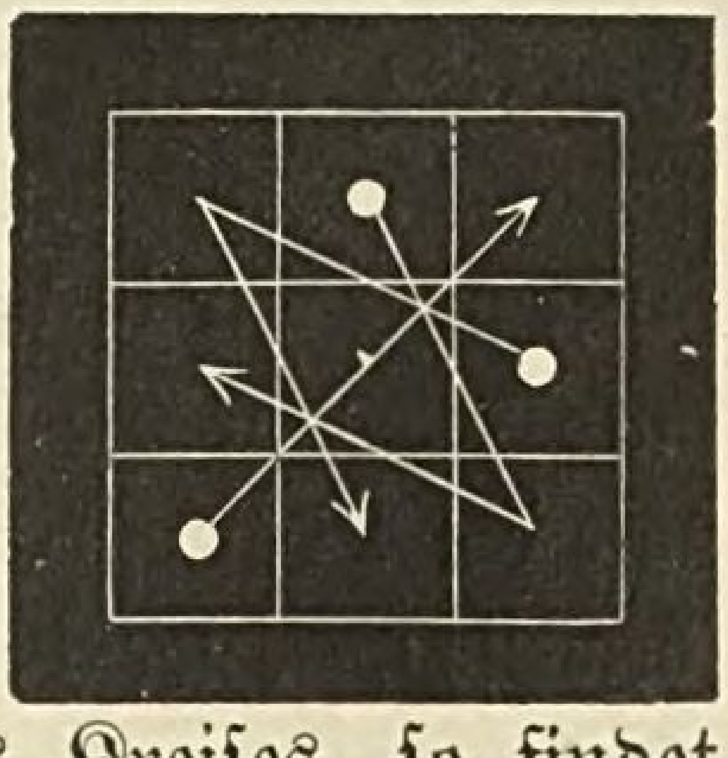
1	2
3	4

1	4
2	3

1	2
4	3

Das erste Quadrat der Fig. 18 bietet die Summe fünf in den Diagonalen, das zweite in den Horizontalen, das dritte in den Vertikalen. Es giebt 24 verschiedene Formen dieser Art, entsprechend dem Produkt der ersten vier Zahlen, und es ist unmöglich, gleichzeitig für sämmtliche Reihen diese verlangte Summe fünf zu erhalten. Nehmen wir dagegen die ersten neun Zahlen, um das nächst höhere Quadrat mit drei Zahlen in jeder Seite zu bilden, so werden wir nach einigen Versuchen ein vollkommenes Quadrat erhalten, wenn wir die geraden Zahlen 2, 4, 6, 8 der Reihe nach in die Ecken setzen, die Fünf als mittlere Zahl in die Mitte des Quadrats und die übrigen vier ungeraden Zahlen 1, 3, 7, 9 in die Mitten der Seiten setzen. Sämmtliche sechs Reihen haben die Summe $15 = \frac{3}{2} (9 + 1)$. Das Schema, nach welchem die Zahlen eingetragen werden müssen, wird durch die Fig. 19 angedeutet. Wir erhalten nach dem Prinzip der Drehung und Spiegelung in Folge der Symmetrie acht verschiedene Formen. Als Geduldspiel kann die Bildung des Quadrats mit den entsprechenden Karten eines vollständigen Kartenspiels ausgeführt werden. Schreibt man die ersten neun Zahlen der Reihe nach auf die Peripherie eines Kreises, so findet

Fig. 19.



man folgende Zusammenstellungen von je drei Zahlen mit der Summe 15:

4 5 6
3 5 7
2 5 8
1 5 9
2 6 7
3 4 8
2 4 9
1 6 8

Hieraus kann man die richtigen Anordnungen der Zahlen bilden.

Das nächste Quadrat aus den ersten sechszehn Zahlen hat eine historische Berühmtheit erhalten. Auf dem Bilde „Melancholie" von Albrecht Dürer findet sich eine Tafel mit den Zahlen der Fig. 20

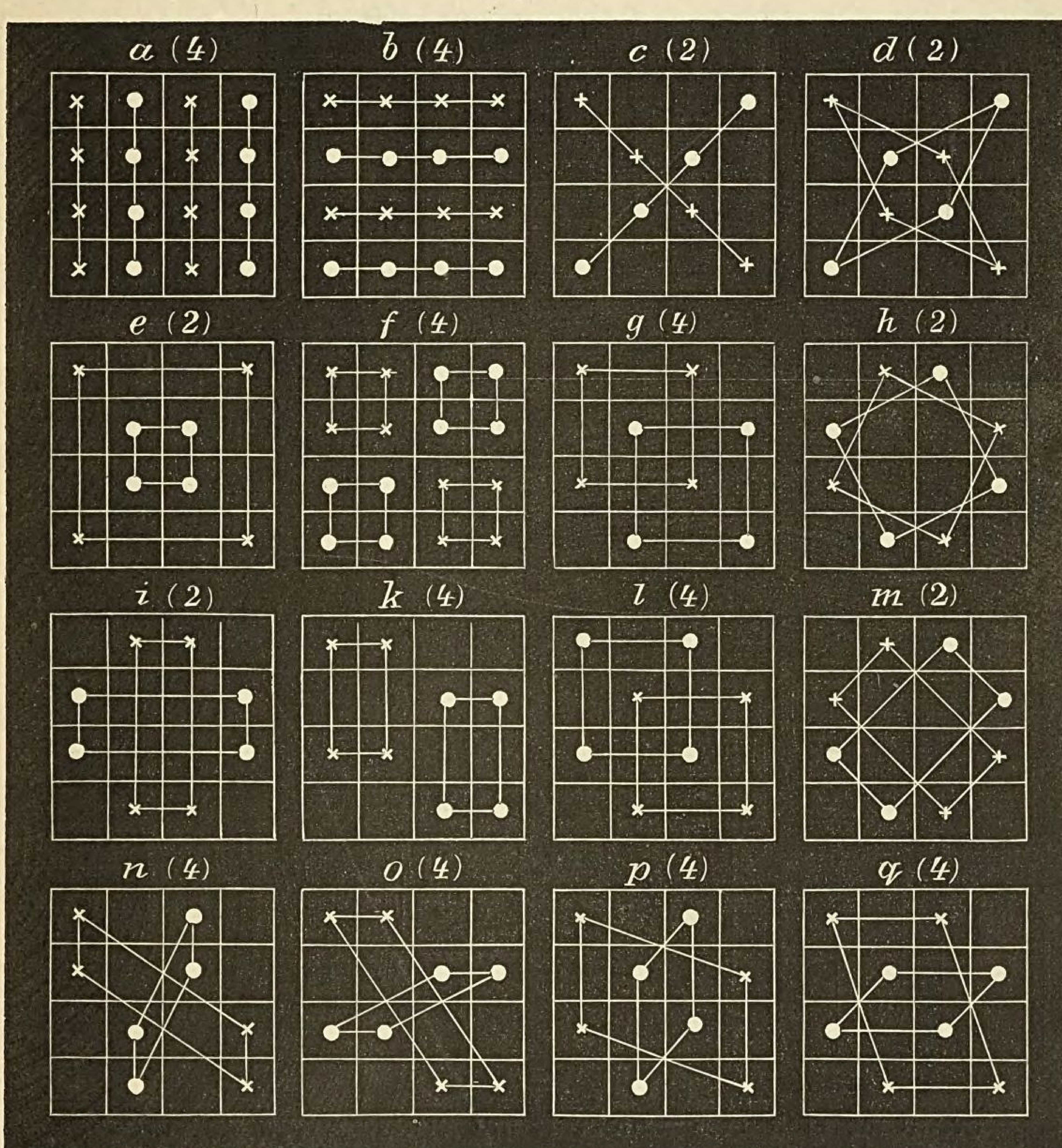
Fig. 20.

13	3	2	16
8	10	11	5
12	6	7	9
1	15	14	4

Die mittleren Zahlen der unteren Reihe bilden die Jahreszahl 1514 der Verfertigung des Bildes. Wir können durch Benutzung der Symmetrie sofort wieder acht ähnliche Formen bekommen, wollen aber diese Gruppe als Form auffassen, da wir sie ja durch Drehung und Spiegelung erhalten können. Dann lassen sich aus diesen ersten sechszehn Zahlen 880 verschiedene Gruppen zu je acht bilden, vollständig gezählt demnach 7040 Formen. Es giebt aber jenes Quadrat nicht nur in den horizontalen, vertikalen und diagonalen Reihen, also zehnmal die Summe 34, sondern weit öfter, nämlich 52 mal, wie die 16 Figuren a, b, c, d, e, f, g, h, i, k, l, m, n, o, p, q beweisen. Hier in Fig. 21 kann man leicht an den Linien diejenigen Zahlen des vollkommenen magischen Quadrats verfolgen, welche die

Summe 34 geben müssen, wobei zu beachten ist, daß in einigen der Klarheit wegen nur zweimal die Linie gleicher Summen gezeichnet ist, während es viermal möglich gewesen wäre. Am einfachsten scheint

Fig. 21.



mir die Regel für die Bildung dieses magischen Quadrats zu sein, daß man von zwei gegenüberliegenden Ecken des Quadrats einzählt: von der ersten Ecke aus die Felder der Diagonalen, von der gegenüberliegenden Ecke aus die acht übrigen Mittelfelder an den Seiten. Lucas giebt folgende Regel (Fig. 22): Man bilde eine Summationstabelle in folgender Weise:

Fig. 22.

	a	b	c	d
p	ap	bp	cp	dp
q	aq	bq	cq	dq
r	ar	br	cr	dr
s	as	bs	cs	ds

wobei das Pluszeichen zwischen den Größen auf den Feldern hinzuzudenken ist. Wenn man hier die acht Mittelfelder über Kreuz vertauscht, z. B. bp mit cs und dann die vier oberen rechten Eckglieder mit den vier unteren linken, so erhält man, welche Zahlen auch gewählt werden, stets ein vollkommenes Quadrat. Man erhält

zuerst:

ap	cs	bs	dp
dr	bq	cq	ar
dq	br	cr	aq
as	cp	bp	ds

Fig. 23.

dann:

ap	cs	dq	br
dr	bq	as	cp
bs	dp	cr	aq
cq	ar	bp	ds

Vergleicht man dies Quadrat mit den sechszehn vorhin aufgeführten Formen, so sieht man, daß auf 52 verschiedene Arten die Summe der acht gewählten Grundzahlen ab, cd, pq, rs entsteht. Kann man demnach sechszehn Zahlen in jener Summenform darstellen, so bilden sie auch, nachdem man jene beiden Vertauschungen vorgenommen hat, ein vollständiges Quadrat.

Bei Fig. 24 hat man bereits nach der ersten Vertauschung ein vollkommenes magisches Quadrat; es stimmt vollständig überein mit

demjenigen, welches man durch Einzählung aus den gegenüberliegenden Ecken erhält. Als Kartenaufgabe würden wir folgendes Pro-

	1	2	3	4
0	1	2	3	4
4	5	6	7	8
8	9	10	11	12
12	13	14	15	16

Fig. 24.

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

blem nach derselben Methode lösen können: Die vier Aß, Könige, Damen und Buben in vier Vertikal- und Horizontalreihen sind so zu ordnen, daß in jeder Reihe jede Farbe und jedes Bild nur einmal vorkommt. Außerdem würde bei unserer Gruppirung auch noch auf 48 andere Arten dieselbe Bedingung erfüllt sein. Die Lösung ist in Fig. 25 dargestellt. Sie kann auch durch folgende beiden Hilfsquadrate erhalten werden (Fig. 26):

Fig. 25.

Treff-Aß	Pique-König	Coeur-Dame	Carreau-Bube
Coeur-Bube	Carreau-Dame	Treff-König	Pique-Aß
Carreau-König	Coeur-Aß	Pique-Bube	Treff-Dame
Pique-Dame	Treff-Bube	Carreau-Aß	Coeur-König

1	2	3	4
4	3	2	1
2	1	4	3
3	4	1	2

Fig. 26.

0	4	8	12
8	12	0	4
12	8	4	0
4	0	12	8

Die Zahlen des ersten Quadrates 1, 2, 3, 4 bedeuten Aß, König, Dame und Bube, die des zweiten 0, 4, 8, 12 die Farben Treff, Pique, Coeur, Carreau. Man wird den Zusammenhang dieser Methode mit der Additionstabelle, welche wir vorhin erwähnten, leicht finden. Bezüglich jener Tabelle mag noch erwähnt werden, daß bei ganz beliebiger Wahl der Summanden Zahlen mehrfach vorkommen werden. Die folgenden Beispiele in Fig. 27 sind so gewählt, daß man nach der Addition aufeinanderfolgende und

	1	2	9	10
0	1	2	9	10
4	5	6	13	14
2	3	4	11	12
6	7	8	15	16

Fig. 27.

0	1	8	9
0	1	8	9
4	5	12	13
2	3	10	11
6	7	14	15

von einander verschiedene Zahlen der Zahlenreihe erhält. Bei der zweiten Form ist jeder der oberen Summanden um eine Einheit verkleinert. Die Summe ist daher nicht mehr 34, sondern

$$30 = \frac{1}{2} \times 4 \times (15 + 0).$$

Durch Umstellungen, der Fig. 23 entsprechend, erhält man magische Quadrate.

Bisher ist fast nur von solchen vollkommenen magischen Quadraten mit 16 Feldern die Rede gewesen, welche die ersten 16 Zahlen der natürlichen Zahlenreihe enthalten. Nehmen wir einmal statt der Zahl 9 die Zahl 17, so wird bei richtiger Gruppierung die Summe in jeder Reihe um zwei größer sein, also 36 betragen. Die Einzählung kann wieder genau nach der einfachen obigen Regel erfolgen. Will man die Summe 38 haben, so muß man etwa mit 17 und 18 die Reihe fortsetzen und dafür zwei Zahlen herausnehmen, deren Summe um 16 (4×4) kleiner ist als $17 + 18 = 35$, also etwa 5 und 14. Diese beiden ausscheidenden Zahlen müssen allerdings symmetrisch zur Mitte liegen, ebenso wie die vorhin aus-

fallende Neun auch die Mittelzahl war für die Zahlen von 1 bis 17. Die Zahlen 5 und 14 erfüllen für die Zahlen von 1 bis 18 diese Bedingung. Die nächsten vier Quadrate in Fig. 28 haben die Summen 36, 38, 40, 42. Schreitet man so fort, so gelangt

1	16	15	4
13	6	7	10
8	11	12	5
14	3	2	17

An die Stelle von 9 ist 17 getreten, wodurch sich der Durchschnittswert jeder Zahl um $1/2$ erhöht.

1	17	16	4
13	7	8	10
9	11	12	6
15	3	2	18

An die Stelle von 5 und 14 sind 17 und 18 getreten; dadurch hat sich der Durchschnittswert jeder Zahl um 1 erhöht.

Fig. 28.

1	18	17	4
14	7	8	11
9	12	13	6
16	3	2	19

5, 10, 15 fehlen; dafür 17, 18, 19. $(17 + 18 + 19) - (5 + 10 + 15) = 24 = 4 \times 6 = 4\,(40 - 34)$.

1	19	18	4
15	7	8	12
9	13	14	6
17	3	2	20

5, 10, 11, 16 fehlen; dafür 17, 18, 19, 20. $(17 + 18 + 19 + 20) - (5 + 10 + 11 + 17) = 32 = 4 \times 8 = 4\,(42 - 34)$.

man zu Quadraten mit immer höherer Summenzahl. In Fig. 29 sind vier Quadrate mit der Summe hundert, die man wieder auf 52 verschiedene Arten erhalten kann. Die ausgeschiedenen Zahlen sind nicht dieselben in jedem Quadrat. Läßt man auch negative Zahlen zu, so kann man die konstante Summe unter 30 bringen.

Wir haben oben bereits jenes Quadrat angeführt, bei welchem an die Stelle der 16 die Null getreten war. Es besaß die Summe 30.

1	43	36	20
46	10	17	27
23	33	40	4
30	14	7	49

1	44	35	20
48	7	16	29
21	34	43	2
30	15	6	49

Fig. 29.

1	43	36	20
47	9	16	28
22	34	41	3
30	14	7	49

1	44	36	19
47	8	16	29
21	34	42	3
31	14	6	49

Hier folgen noch einige magische Quadrate mit geringerer Summenzahl (Fig. 30).

Fig. 30.

—4	8	10	3
11	2	—1	5
4	9	7	—3
6	—2	1	12

17

—4	8	10	2
11	1	—1	5
3	9	7	—3
6	—2	0	12

16

(Zu Fig. 30.)

— 8	3	5	— 2
6	— 3	— 5	0
— 1	4	2	— 7
1	— 6	— 4	7

— 2

Wünscht man Quadrate, bei denen die Summe eine ungerade Zahl ist, so kann man niemals ein ganz vollkommenes Quadrat erhalten. Die Zahlen stehen nicht mehr paarweise symmetrisch zum Mittelpunkt, weil es nicht möglich ist, gleichzeitig die richtige Summe zu erhalten und die ausfallenden Zahlen so zu wählen, daß sie zur Mitte symmetrisch sind. Will man z. B. die Summe 35 haben, so fügt man die Zahl 17 hinzu, muß dann aber die Zahl 13, welche nicht in der Mitte liegt, ausscheiden, damit die richtige Summe herauskommt. So ergiebt sich folgendes Quadrat (Fig. 31):

Fig. 31.

1	12	15	7
16	6	4	9
8	14	11	2
10	3	5	17

Das unvollkommene Quadrat in Fig. 32 hat die Summe 37; es fehlen die Zahlen 9 und 14, wogegen 17 und 18 hinzugekommen sind. Die Differenz von (17 + 18) und (9 + 14) ist gleich 12 und bedingt einen Zuwachs von durchschnittlich drei Einheiten in jeder Reihe. (34 + 3 = 37.)

Fig. 32.

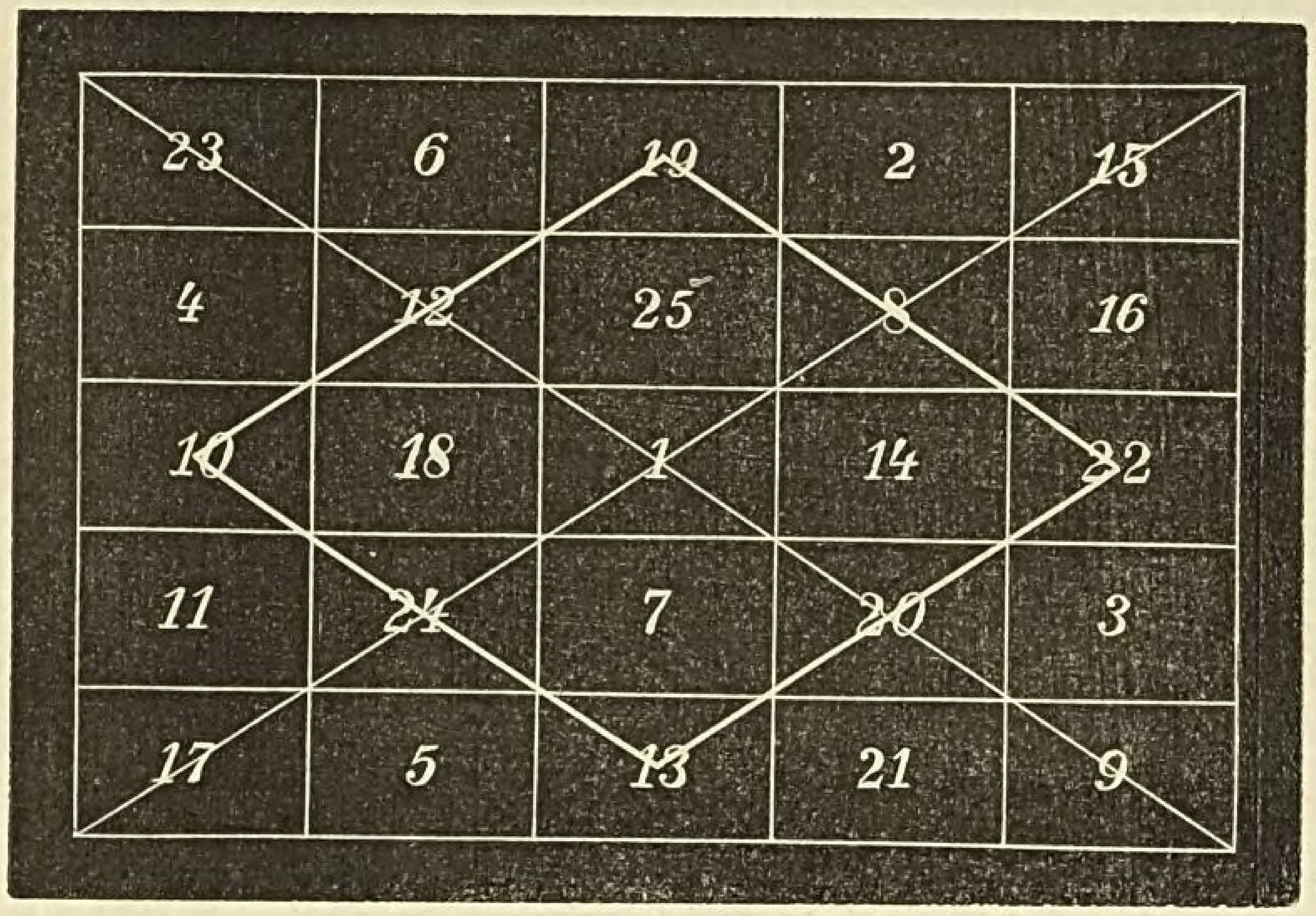
1	17	16	4
13	6	7	10
8	11	12	5
15	3	2	18

Zum Schluß mögen noch einige Angaben über die Anzahl der verschiedenen Reihen folgen, durch welche dieselbe Summe erreicht wird. Für die Summe 34 giebt es nur eine Reihe der natürlichen Zahlen von 1 bis 16, für 36 giebt es auch nur eine Reihe, da nur die Neun fortfallen kann, für welche 17 an die Stelle tritt. Dagegen giebt es für die Summe 38 bereits drei Reihen, da man außer 5 und 14 auch 9 und 10 oder 1 und 18 fortlassen kann; die übrigen Kombinationen, wie 4 und 15, 3 und 16 u. s. f. sind nicht geeignet zur Ausscheidung. Ebenso giebt es für die Summe 42 sieben Reihen, für die Summe 46 dreizehn, für 50 dreiundzwanzig, für 74 bereits 218, für 90 gar 590 und für 100 endlich 895 verschiedene Reihen. Da nun jede Reihe zur Bildung von etwa 30 000 verschiedenen magischen Quadraten Veranlassung giebt, die zehnmal oder noch öfter dieselbe Summe geben, so kann z. B. die Summe 100 in etwa 27 Millionen Quadraten dargestellt werden. Würde jemand täglich vier Stunden lang in jeder Stunde 25 solcher Quadrate mit der Summe 100 bilden, so würde er, falls man 270 Arbeitstage zu Grunde legte, 1000 Jahre daran zu thun haben, um sämmtliche möglichen magischen Quadrate mit dieser Summe zu bilden, von denen keine zwei gleich sein würden.

Hier folgt noch in Fig. 33 ein interessantes magisches Quadrat mit den ersten 25 Zahlen, bei welchem die Eins in der Mitte steht. Hier bilden je vier symmetrische Zahlen mit dieser mittleren Zahl die Summe 65, da 23 + 9 + 15 + 17 = 64

$12 + 20 + 8 + 24 = 64$ und $19 + 13 + 10 + 22 = 64$ ist. Ein paar symmetrische Zahlen bilden die Summe $32 = \frac{64}{2}$.

Fig. 33.



Wir wollen nun zu Quadraten mit höherer Felderzahl übergehen. Die vollkommenen magischen Quadrate mit der Felderzahl 16 führen uns zunächst auf diejenigen, deren Seitenlänge ein Vielfaches der Zahl Vier ist. Diese können nämlich genau nach demselben Schema eingezählt werden, wie das einfache magische Quadrat mit der Seitenlänge Vier. Das in der Fig. 34 dargestellte Quadrat hat in jeder Seite 16 Zahlen, enthält also die Zahlen von 1 bis 256. Man zerlege dieses nun in 16 Grundquadrate mit der Seitenlänge Vier und bringe in jedem die von zwei gegenüberliegenden Ecken eingezählten Zahlen so unter, wie es oben für das Grundquadrat erläutert worden ist. Am einfachsten kennzeichnet man diese Einzählung, wenn man in den kleinen Quadraten die Diagonalen zieht; die so bezeichneten Felder werden in natürlicher Zahlenfolge von links oben eingezählt, alle anderen von rechts unten. Die Summe beträgt in jeder Reihe, Zeile und Diagonale $2056 = \frac{1}{2} \times 16 \times (256 + 1)$. Je zwei symmetrisch vom Mittelpunkte abstehende Zahlen haben stets die Summe 257, wodurch eine große Mannigfaltigkeit konstanter Summen ermöglicht wird. Je vier symmetrische Felder haben die Summe 514, je acht 1028

und so fort. Es lassen sich auch magische Figuren einzeichnen, die eine leicht bestimmbare Summe ergeben, wenn man die betroffenen Felderzahlen addirt. Diese Figuren müssen in Bezug auf den Mittelpunkt nach den Seiten und Diagonalen symmetrisch sein und dürfen daher nur Linien enthalten, die den Seiten oder

Fig. 34.

1	255	254	4	5	251	250	8	9	247	246	12	13	243	242	16
270	18	19	237	236	22	23	233	232	26	27	229	228	30	31	225
224	34	35	221	220	38	39	217	216	42	43	213	212	46	47	209
49	207	206	52	53	203	202	56	57	199	198	60	61	195	194	64
65	191	190	68	69	187	186	72	73	183	182	76	77	179	178	80
176	82	83	173	172	86	87	169	168	90	91	165	164	94	95	161
160	98	99	157	156	102	103	153	152	106	107	149	148	110	111	145
113	143	142	115	117	139	138	120	121	135	134	124	125	131	130	128
129	127	126	132	133	123	122	136	137	119	118	140	141	115	114	144
112	146	147	109	108	150	151	105	104	154	155	101	100	158	159	91
96	162	163	93	92	166	167	89	88	170	171	85	84	174	175	81
177	79	78	180	181	75	74	184	185	71	70	188	189	67	66	192
193	63	62	196	197	59	58	200	201	55	54	204	205	51	50	208
48	210	211	45	44	214	215	41	40	218	219	37	36	222	223	33
32	226	227	29	28	230	231	25	24	234	235	21	20	238	229	17
241	15	14	244	245	11	10	248	249	7	8	252	253	3	2	256

Diagonalen parallel sind. In der Fig. 35 ist ein Quadrat mit 81 Feldern dargestellt, in welches einige solcher magischen Figuren eingezeichnet sind. Während bei Quadraten, deren Seite geradzahlig ist, im Schnittpunkt der Diagonale keine Zahl steht, steht in der Mitte der ungeradzahligen Quadrate eine Zahl und zwar die mittlere Zahl, hier also 41. Jede magische Figur enthält nun so oft die Einheiten dieser Zahl, als sie Felder trifft, und je zwei symmetrisch vom Mittelpunkt abstehende Felder in Fig. 35 haben die Summe 82.

Fig. 35.

5	54	13	62	21	70	29	78	37
46	14	63	22	71	30	79	38	6
15	55	23	72	31	80	39	7	47
56	24	64	32	81	40	8	48	16
25	65	33	73	41	17	49	9	57
66	34	74	42	1	50	18	58	26
35	75	43	2	51	10	59	27	67
76	44	3	52	11	60	19	68	36
45	4	53	12	61	20	69	28	77

Eine arithmetische Reihe von einer ungeraden Anzahl hat also eine Mittelzahl, eine solche von gerader Anzahl dagegen nicht, z. B.

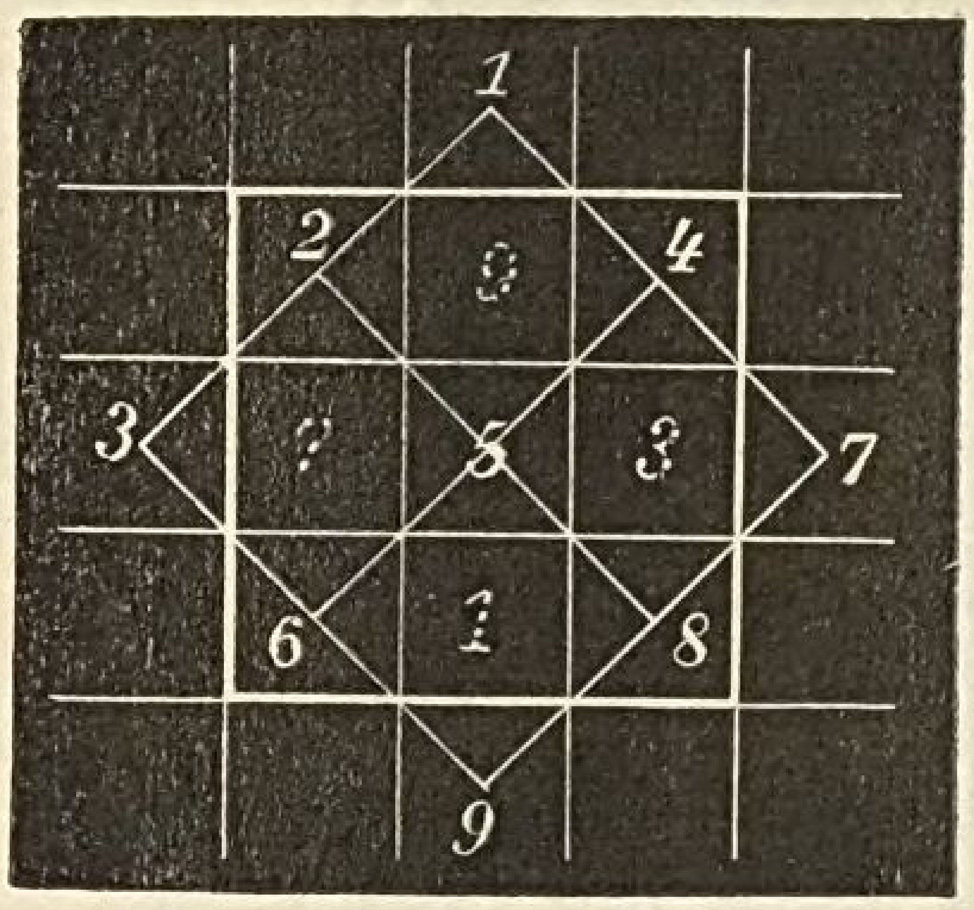
1 2 3 4 5 6 7 8 9   1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Dieser Umstand bringt es mit sich, daß die Bildung von magischen Quadraten nach verschiedenen Methoden erfolgen muß, je nachdem die Seitenzahl gerade oder ungerade ist. Unter den Quadraten von gerader Seitenzahl haben wir bereits diejenigen vorausgenommen, die ein Vielfaches von Vier darstellen, weil sie in sehr einfacher Weise auf die Grundquadrate zurückgeführt werden konnten, deren Bildung bereits den Indern bekannt war.

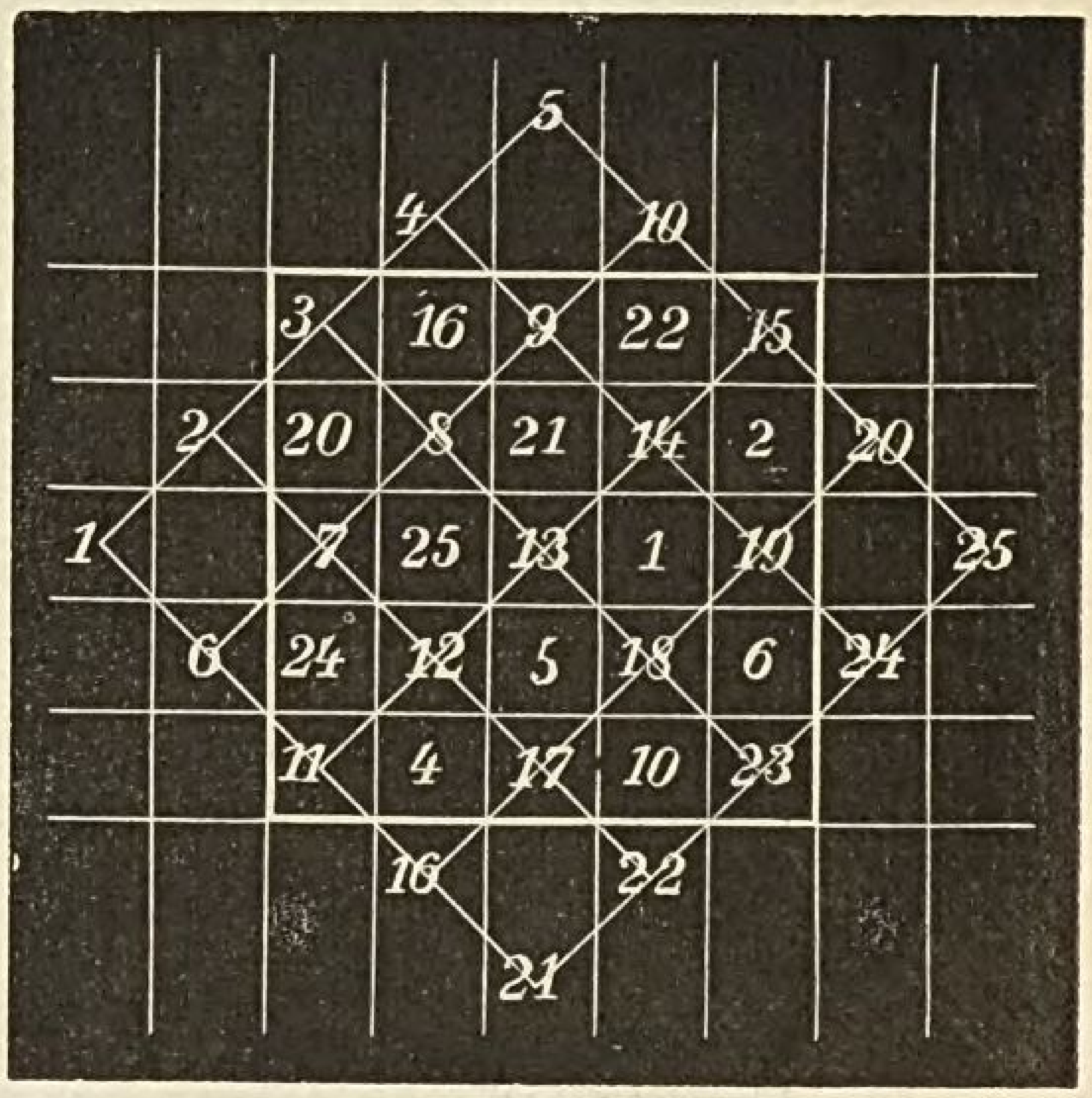
Für die Quadrate mit ungerader Felderzahl ist eine der ältesten Methoden die folgende: Man schreibt die Zahlen in natürlicher Reihenfolge, aber in doppelten Abständen in Form eines auf den Ecken stehenden Quadrates, legt dazwischen senkrechte und wagerechte Linien und besetzt die leer bleibenden Felder so mit den

außenstehenden Zahlen, daß jede Zahl in die freie Gegenecke kommt. Z. B.:

Fig. 36.



oder



Diese schöne und einfache Methode stammt von Bachez de Méziriac. Fig. 36 giebt zwei Beispiele.

Eine andere, von de la Hire, ebenfalls einem französischen Mathematiker, stammende Methode ist von Scheffler vervollkommnet worden. Unter Zyklus wollen wir eine Aufeinanderfolge von Zahlen verstehen, die gleichen Unterschied haben und bei deren Aufstellung man stets wieder von vorn beginnt, z. B. ist 3, 4, 5, 1, 2 ein Zyklus erster Ordnung von fünf Zahlen, dagegen 2, 5, 3, 1, 4 ein Zyklus dritter Ordnung. Wir haben solche Zahlen schon oben bei Gelegenheit des Kartenproblems in den dazu verwandten Hilfs-

Fig. 37.

1	3	5	2	4
2	4	1	3	5
3	5	2	4	1
4	1	3	5	2
5	2	4	1	3

quadraten kennen gelernt. Bilden wir nun z. B. vorstehendes Quadrat (Fig. 37) mit dem Zyklus erster Ordnung in senkrechter und zweiter Ordnung in wagerechter Richtung. Hier findet sich

jede der fünf Zahlen in jeder wagerechten, senkrechten und diagonalen Reihe nur einmal; die Summe ist stets 15. Wollen wir nun ein magisches Quadrat aus den ersten 25 Zahlen, also mit der Summe 65 bilden, so hat man noch ein zweites Hilfsquadrat mit Zyklen zu bilden, deren Summe = 50 (15 + 50 = 65) ist, also fünfter Ordnung in wagerechter und zehnter in senkrechter Richtung (Fig. 38):

Fig. 38.

0	5	10	15	20
10	15	20	0	5
20	0	5	10	15
5	10	15	20	0
15	20	0	10	15

Denkt man diese Quadrate übereinandergelegt und die sich deckenden Zahlen addirt und zwar so, daß der Zyklus erster Ordnung dem Zyklus 10ter Ordnung und derjenige 2ter demjenigen 5ter Ordnung beigesellt wird, so ergiebt sich das magische Quadrat der Fig. 39:

Fig. 39.

1	8	15	17	24
12	19	21	3	10
23	5	7	14	16
9	11	18	25	2
20	22	4	6	13

Es erinnert dies Verfahren wieder an das Additionsschema, welches wir vorhin erwähnt haben. Versuchen wir also einmal nach dieser Methode planmäßig ein magisches Quadrat mit 49 Feldern zu bilden (Fig. 40). Die mittlere Zahl ist 25 und dieses ist daher der durchschnittliche Wert jeder Zahl von 1 bis 49. In der natürlichen Zahlenreihe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 hat jede den durchschnitt-

schnittlichen Wert 4; diese muß daher kombinirt werden mit der Reihe 0, 7, 14, **21**, 28, 35, 42, in welcher die Zahlen den durchschnittlichen Wert 21 haben. Nehmen wir nun für die vertikale Reihe der Hilfsquadrate die zusammengehörigen Zyklen dritter Ordnung 1, 4, 7, 3, 6, 2, 5 und 0, 21, 42, 14, 35, 7, 28, so haben wir die Hilfsquadrate fertig.

Fig. 40.

1	2	3	4	5	6	7
4	5	6	7	1	2	3
7	1	2	3	4	5	6
3	4	5	6	7	1	2
6	7	1	2	3	4	5
2	3	4	5	6	7	1
5	6	7	1	2	3	4

0	21	42	14	35	7	28
7	28	0	21	42	14	35
14	35	7	28	0	21	42
21	42	14	35	7	28	0
28	0	21	42	14	35	7
35	7	28	0	21	42	14
42	14	35	7	28	0	21

1	23	45	18	40	13	35
11	33	6	28	43	16	38
21	36	9	31	4	26	48
24	46	19	41	14	29	2
34	7	22	44	17	39	12
37	10	32	5	27	49	15
47	20	42	8	30	3	25

Durch Addition entsprechender Glieder erhalten wir das gesuchte magische Quadrat. Der Zyklus erster Ordnung des einen Hilfsquadrates muß dem Zyklus höherer Ordnung des anderen Hilfsquadrates zugeordnet werden. Die konstante Summe jeder senkrechten, wagerechten und diagonalen Reihe ist 175. Wenn man die Reihen eines magischen Quadrates in derselben Reihenfolge rechts und unten anlegt, so giebt ein quadratischer Querschnitt von je 49 Feldern immer wieder dieselbe Summe, gleichgültig, wo man ihn herausgreift. Wir fügen noch ein von Schubert gegebenes Beispiel hinzu, welches ein magisches Quadrat mit 121 Feldern darstellt (Fig. 41 a b c).

Fig. 41.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	1	2
5	6	7	8	9	10	11	1	2	3	4
7	8	9	10	11	1	2	3	4	5	6
9	10	11	1	2	3	4	5	6	7	8
11	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	1
4	5	6	7	8	9	10	11	1	2	3
6	7	8	9	10	11	1	2	3	4	5
8	9	10	11	1	2	3	4	5	6	7
10	11	1	2	3	4	5	6	7	8	9

a

0	11	22	33	44	55	66	77	88	99	110
33	44	55	66	77	88	99	110	0	11	22
66	77	88	99	110	0	11	22	33	44	55
99	110	0	11	22	33	44	55	66	77	88
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	0
44	55	66	77	88	99	110	0	11	22	33
77	88	99	110	0	11	22	33	44	55	66
110	0	11	22	33	44	55	66	77	88	99
22	33	44	55	66	77	88	99	110	0	11
55	66	77	88	99	110	0	11	22	33	44
88	99	110	0	11	22	33	44	55	66	77

b

(Zu Fig. 41.)

1	13	25	37	49	61	73	85	97	109	121
36	48	60	72	84	96	108	120	11	12	24
71	83	95	107	119	10	22	23	35	47	59
106	118	9	21	33	34	46	58	70	82	94
20	32	44	45	57	69	81	93	105	117	8
55	56	68	80	92	104	116	7	19	31	43
79	91	103	115	6	18	30	42	54	66	67
114	5	17	29	41	53	65	77	78	90	102
28	40	52	64	76	88	89	101	113	4	16
63	75	87	99	100	112	3	15	27	39	51
98	110	111	2	14	26	38	50	62	74	86

c

Eine dritte Methode, durch welche man bei ungerader Anzahl an jeder Seite magische Quadrate erhalten kann, ist folgende. Bezeichnen wir jedes Feld, wie a. a. O. beim Schachspiel nach der Methode von Vandermonde geschah, mit zwei Zahlen, von denen die erste sich auf die horizontale, die zweite dagegen auf die vertikale Reihe bezieht, also beim Quadrat mit 25 Feldern, wie Fig. 42 zeigt. Dann lassen sich die 25 Zahlen in fünf Gruppen zu je

Fig. 42.

11	12	13	14	15
21	22	23	24	25
31	32	33	34	35
41	42	43	44	45
51	52	53	54	55

fünfen einzählen. Die Gruppen beginnen demnach mit 1, 6, 11, 16, 21. Man beginnt mit der ersten Zahl der ersten Gruppe an

beliebiger Stelle, z. B. bei 53, und geht nun zyklisch weiter nach einem beliebig gewählten aber festen Gesetz. Wir wollen die erste Zahl sowohl wie die zweite um je eine Einheit verschieben, wenn wir um eine Einheit fortschreiten, so daß die ersten fünf Zahlen die Plätze 53, 14, 25, 31, 42 erhalten. Jetzt beginnen wir mit der zweiten Gruppe, welche von 6 bis 11 reicht. Um den Platz der ersten Zahl jeder folgenden Gruppe zu erhalten, gehen wir von der führenden Zahl der vorigen Gruppen aus und beispielsweise mit der ersten Zahl stets um zwei Einheiten, mit der zweiten nur um eine Einheit zurück, so daß die führenden Zahlen der fünf Gruppen die Plätze 53, 32, 11, 45, 24 erhalten. Die nächsten Zahlen jeder Gruppe werden wieder nach demselben Gesetz weitergeführt, wie vorhin die Zahlen der ersten Gruppe, also 7 auf 43, 8 auf 54, 9 auf 15, 10 auf 21, ebenso 12 auf 22, 13 auf 33, 14 auf 44, 15 auf 55, 17 auf 51, 18 auf 12, 19 auf 23, 20 auf 34 und endlich 22 auf 35, 23 auf 41, 24 auf 52, 25 auf 13. Die Tabelle sieht dann so aus wie Fig. 43 zeigt und giebt in allen Richtungen die Summe $65 = 5 \times 13 = \frac{5}{2} \times (25 + 1)$.

Fig. 43.

11	18	25	2	9
10	12	19	**21**	3
4	**6**	13	20	22
23	5	7	14	**16**
17	24	**1**	8	15

Aehnlich ist das folgende magische Quadrat (Fig. 44) gebildet, in welchem die Einreihung jeder Gruppe in vertikaler Richtung stets um zwei Einheiten, in horizontaler um eine fortschreitet, während die Versetzung von Gruppe zu Gruppe in jeder Richtung eine Einheit beträgt. Die führenden Zahlen sind wieder hervorgehoben und liegen in der Hauptdiagonale, während sie vorher in zwei jedoch nicht zur Diagonale parallelen Linien lagen. Auch die Glieder jeder Gruppe liegen stets in mehreren Linien von paralleler Richtung. Diese Methode unterliegt jedoch einer Beschränkung

Bezeichnen wir nämlich die Seitenzahl, also auch die Gruppenzahl mit n, die Größe der Verschiebung in horizontaler Richtung mit h und h', in vertikaler mit v und v', so müssen $n, h, h', v, v', hv' - vh', h + v, h' + v', h - v, h' - v'$ relativ prim zu einander

Fig. 44.

1	15	24	8	17
22	**6**	20	4	13
18	2	**11**	25	9
14	23	7	**16**	5
10	19	3	12	**21**

sein, d. h. sie dürfen keine gemeinsamen Teiler haben. In dem ersten unserer beiden Beispiele war $n = 5$, $h = 1$, $v = 1$, $h' = -2$, $v' = -1$, also $hv' - vh' = +1$, $h + v = 2$, $h' + v' = -3$, $h - v = 0$, $h' - v' = 2$, im zweiten $n = 5$, $h = 1$, $v = 2$, $h' = 1$, $v' = 1$, also $hv' - vh' = -1$, $h + v = 3$, $h' + v' = 2$, $h - v = -1$, $h' - v' = 0$. Diese Zahlen enthalten keine gemeinsamen Teiler und die erhaltenen Quadrate sind daher magische. Wir wollen auf's Geratewohl noch einige andere

Fig. 45.

1	19	30	48	10	28	39
35	46	8	26	37	6	17
13	24	42	4	15	33	44
40	2	20	31	49	11	22
18	29	47	9	27	38	7
45	14	25	36	5	16	34
23	41	3	21	32	43	12

bilden. Der Platz der ersten Zahl ist stets völlig beliebig; wir beginnen im Felde 11 und es soll $n = 7$ sein (Fig. 45).

I. Gruppe:	**11**	42	73	34	65	26	57
Zahlen:	1	2	3	4	5	6	7
II. Gruppe:	**23**	54	15	46	77	31	62
Zahlen:	8	9	10	11	12	13	14
III. Gruppe:	**35**	66	27	51	12	43	74
Zahlen:	15	16	17	18	19	20	21
IV. Gruppe:	**47**	71	32	63	24	55	16
Zahlen:	22	23	24	25	26	27	28
V. Gruppe:	**52**	13	44	75	36	67	21
Zahlen:	29	30	31	32	33	34	35
VI. Gruppe:	**64**	25	56	17	41	72	33
Zahlen:	36	37	38	39	40	41	42
VII. Gruppe:	**76**	37	61	22	53	14	45
Zahlen:	43	44	45	46	47	48	47

In jeder wagerechten, senkrechten und diagonalen Reihe beträgt die Summe 175. Die führenden Gruppenzahlen, sowie die Zahlen jeder Gruppe liegen in parallelen Reihen, die sich leicht verfolgen lassen. In diesem Beispiele war $n = 7$, $h = 1$, $v = 3$, $h' = 2$, $v' = 1$, $hv' - vh' = -5$, $h + v = 4$, $h - v = -2$, $h' + v' = 3$, $h' - v' = 1$; diese sind bis auf $h + v$ und $h - v$ zu einander prim. Es hat daher dies Quadrat gewisse Mängel. Diese sind für uns nicht bemerkbar, da wir einige Eigenschaften der vollkommenen magischen Quadrate bisher nicht besonders hervorgehoben haben. Im Mittelpunkt eines solchen Quadrats muß nämlich die mittlere Zahl stehen, falls die Seitenzahl ungerade ist. Dies ist hier nicht der Fall. Außerdem müssen je zwei symmetrisch um den Mittelpunkt liegende Zahlen stets die Summe $(n^2 + 1)$, hier also 50, haben. Auch das trifft für unsere Form nicht zu. Wir wollen bei dieser Gelegenheit bemerken, daß in magischen Quadraten nicht nur die Summe der horizontalen, vertikalen und diagonalen Reihen konstant ist, sondern auch die Summen von je zwei Reihen, welche zu den Diagonalreihen parallel laufen und komplementär zu einander sind. Dieser Bedingung genügt unser letztes Quadrat auch, ebenso wie die vorhergehenden, wovon man sich leicht überzeugen kann. Zum Beispiel geben in Fig. 43 11, 24, 7, 20 und 3 wieder die Summe 65, ebenso 10, 18, 1, 14, 22 und 4, 12, 25, 8, 16, sowie 23, 6, 19, 2, 15. Bei den zur andern Diagonale gehörigen Reihen ist es ebenso. In dem Quadrat Fig. 45 sind beispielsweise 10, 6, 44 und

40, 29, 25, 21 komplementär, ebenso 39 und 35, 24, 20, 9, 5, 43. Thatsächlich geben immer je sieben solcher zusammengehörender Zahlen auch die Summe 175 und es giebt zwölf in dieser Art gebildete Paare von Reihen. Wir machen hierbei wieder auf die Punktfiguren aufmerksam, die wir oben bei dem Quadrat mit 81 Feldern gebildet haben. Aehnliche Figuren lassen sich auch für alle vollkommenen magischen Quadrate von ungerader Stellenzahl bilden, falls im Mittelpunkte die *mittlere Zahl*, also $\frac{1}{2}(n^2 + 1)$, steht.

Das Quadrat mit der Felderzahl Neun in jeder Reihe läßt sich durch Wiederholung des Verfahrens in sehr hübscher Weise aus dem Quadrat mit der Stellenzahl Drei bilden. Denken wir uns die betreffende Fläche in neun Quadrate mit je neun Feldern zerlegt und in jedes der neun größeren Quadrate diejenige Zahl gesetzt, welche in dem neunfeldrigen Quadrate ihm zukommt, so hat man, mit der *Eins* beginnend, nur an die Stelle jeder Zahl ein nach demselben Gesetz gebildetes Quadrat von neun Zahlen zu setzen, um ein vollkommenes Quadrat von 81 Zahlen mit der konstanten Summe $369 = \frac{1}{2} \times 9 \times (9^2 + 1)$ zu erhalten (Fig. 46).

Fig. 46.

31	36	29	76	81	74	13	18	11
30	32 (4)	34	75	77 (9)	79	12	14 (2)	16
35	28	33	80	73	78	17	10	15
22	27	20	40	45	38	58	63	56
21	23 (3)	25	39	41 (5)	43	57	59 (7)	61
26	19	24	44	37	42	62	55	60
67	72	65	4	9	2	49	54	47
66	68 (8)	70	3	5 (1)	7	48	50 (6)	52
71	64	69	8	1	6	53	46	51

Je zwei vom Mittelpunkt gleichweit abstehende Zahlen besitzen die Summen $n^2 + 1 = 82$. Das Quadrat ist demnach ein voll-

kommenes. Dieses Verfahren läßt sich natürlich auch mehrfach wiederholen, z. B. müßte man für n = 27 noch einmal wieder in derselben Weise erweitern.

Wir wollen jetzt ebenso einige Methoden zur Bildung von Quadraten mit gerader Seitenzahl erörtern. Beginnen wir bei dem Quadrat mit sechs Feldern in jeder Seite, so läßt sich dieses zunächst herstellen durch Vornahme einer Zerlegung, den Faktoren Zwei und Drei dieser Zahl entsprechend. Entweder bilden wir demnach vier Quadrate mit je neun Feldern oder neun Quadrate mit je vier Feldern. Die Felder werden den früheren Regeln entsprechend besetzt. Um das in vier Quadrate zerteilte Feld zu besetzen, bilden wir neun Gruppen, deren jede vier aufeinanderfolgende Zahlen enthält. Die entsprechenden Zahlen jeder Gruppe kommen auf entsprechende Felder gemäß einer Form des magischen Quadrats zu neun Zahlen. Da nun aber für das Quadrat zu vier Zahlen 24 verschiedene Formen möglich sind, wie wir oben gesehen haben, so hat man unter diesen Auswahlen zu treffen für die weitere Besetzung. Hier (Fig. 47) ist ein solches magisches Quadrat, welches

23	3	29	24	2	30
28	17	12	25	18	11
7	35	14	8	34	13
22	4	31	21	1	32
26	19	10	27	20	9
5	33	15	6	36	16

Fig. 47.

6	1	8
7	5	3
2	9	4

der Form entspricht. Die Summe ist stets 111 = 3 × 37. Die Mannigfaltigkeit ist, wie leicht ersichtlich, eine sehr große. Bilden wir dagegen neun Quadrate, so fassen wir unsere Zahlen in neun Gruppen zu je vieren zusammen und setzen jede Gruppe an die Stelle des zu Grunde gelegten Schemas (Fig. 48). Die Schwierigkeit dieser Bildungen besteht lediglich darin, die vier Zahlen jeder Gruppe an den richtigen Platz zu bringen. Um dies zu erreichen, muß man sich zuvor ein Schema

Fig. 48.

23	24	4	2	29	30
22	21	3	1	31	32
28	25	17	18	12	11
26	27	19	20	10	9
8	7	35	34	14	13
5	6	33	36	15	16

machen, in welches man die Zahlen von 1 bis 4 so unterbringt, daß die Summe in allen Richtungen dieselbe (15) ist. Solcher Schemata giebt es natürlich eine große Anzahl, von denen drei hier folgeu mögen (Fig. 49):

Fig. 49.

3	4	3	2	1	2
2	1	4	1	3	4
4	1	1	2	4	3
2	3	3	4	2	1
3	4	3	2	2	1
1	2	1	4	3	4

1	3	4	2	2	3
2	4	3	1	1	4
3	4	1	3	3	1
2	1	2	4	2	4
3	2	4	2	3	1
4	1	1	3	4	2

2	1	3	2	3	4
3	4	1	4	1	2
4	3	1	2	4	1
2	1	3	4	2	3
1	2	3	2	3	4
3	4	4	1	2	1

Zu diesen Zahlen braucht man nur entsprechend dem Neuner-Schema die Zahlen 0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32 hinzuzuzählen, um das gewünschte magische Quadrat zu erhalten. Die vier Zahlen des oberen mittleren Feldes in der ersten Form bleiben demnach, wenn wir wieder dasselbe Neuner-Schema wie oben zu Grunde legen, unverändert, die des unteren linken werden um vier vermehrt, die des mittleren rechten um acht und so fort. Wir erhalten so das zweite der oben angeführten fertigen Quadrate. Bei der ersten Methode mit vier Quadraten wird ähnlich verfahren, indem man die Zahlen von 0 bis 8 zu gleicher Summe unterbringt und dann 0, 9, 18 und 27 beziehungsweise addirt. Nach derselben Methode kann man auch höhere Quadrate bilden: Zu-

nächst mit 8 Feldern an jeder Seite, indem man entweder 16 Quadrate mit je vier Feldern, oder vier Quadrate mit je 16 Feldern bildet und wie oben verfährt. Zu Grunde liegt also ein Schema mit 16 Feldern und mit 4 Feldern, die miteinander passend kombinirt werden. Hier folgen zwei Paare zusammengehöriger Formen (Fig. 50):

1	48	54	27	3	46	50	31
59	22	16	33	63	18	14	35
32	49	43	6	30	51	47	2
38	11	17	64	34	15	19	62
5	44	56	25	7	42	52	29
57	24	12	37	61	20	10	39
28	53	41	8	26	55	45	4
40	9	21	60	36	13	23	58

I.

1	3	48	46	54	50	27	31
5	7	44	42	56	52	25	29
59	63	22	18	16	14	33	35
57	61	24	20	12	10	37	39
32	30	49	51	43	47	6	2
28	26	53	55	41	45	8	4
38	34	11	15	17	19	64	62
40	36	9	13	21	23	60	58

Fig. 50.

1	60	46	23	17	44	14	55
31	38	52	9	63	6	36	25
56	13	27	34	40	29	59	2
42	19	5	64	10	51	21	48
83	28	62	7	49	12	30	39
15	54	20	41	47	22	4	57
24	45	11	50	8	61	43	19
58	3	37	32	26	35	53	16

II.

1	17	60	44	46	14	23	55
33	49	28	12	62	30	7	39
31	63	38	6	52	36	9	25
15	47	54	22	20	4	41	57
56	40	13	29	27	59	34	2
24	8	45	61	11	43	50	18
42	10	19	51	5	21	64	48
58	26	3	35	37	53	32	16

Die erste Zahl jedes sechszehnfeldrigen Quadrates steht in derselben Ordnung in dem ersten vierfeldrigen Quadrat und so fort, so daß jede wagerechte Reihe der vier sechszehnfeldrigen Quadrate auch die entsprechende wagerechte Reihe der vierfeldrigen bildet. Man sieht hieraus, daß gewisse symmetrische Vertauschungen vorgenommen werden können, ohne daß die Quadrate aufhören vollkommene magische Quadrate zu bleiben. Die Summe je vier symmetrischer Zahlen ist 130, die eines Paares 65. In Amerika hat ein Quadrat mit 64 Zahlen, welches sich auf das Leben des Generals Grant bezieht, eine gewisse Berühmtheit erlangt. Er wurde 1822

geboren und starb 1885, sein Leben umfaßte also 64 Jahreszahlen. Diese bilden das Quadrat, in dessen vier Ecken die Hauptzahlen seines Lebens stehen, das Geburts- und Todesjahr, das Eintrittsjahr in die Armee (1843) und das Jahr seiner höchsten Ehrung (1864). Wir unterlassen die Hersetzung des Quadrats, da jeder dasselbe durch Einzählung aus zwei gegenüberliegenden Ecken leicht selbst wird bilden können.

Gerade wie bei ungerader Felderzahl gelingt es auch bei gerader, durch Benutzung von zwei Hilfsquadraten, deren entsprechende Zahlen vereinigt werden, magische Quadrate zu bilden. Allerdings

Fig. 51.

1	5	4	3	2	6
6	2	4	3	5	1
6	5	3	4	2	1
1	5	3	4	2	6
6	2	3	4	5	1
1	2	4	3	5	6

+

0	30	30	0	30	0
24	6	24	24	6	6
18	18	12	12	12	18
12	12	18	18	18	12
6	24	6	6	24	24
30	0	0	30	0	30

=

1	35	34	3	32	6
30	8	28	27	11	7
24	23	16	16	14	19
13	17	21	22	20	18
12	26	9	10	29	25
31	2	4	33	5	36

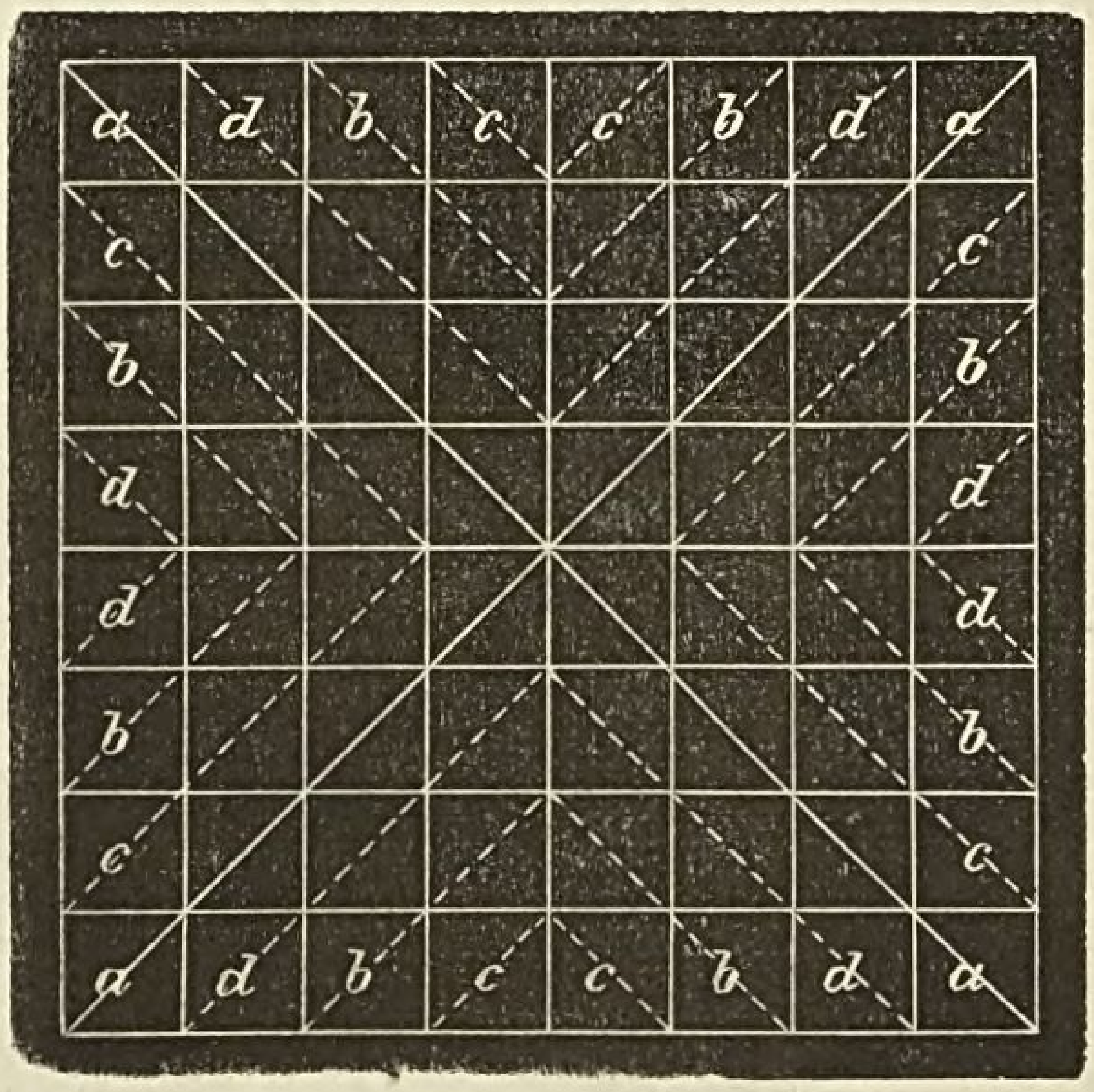
lassen sich diese Hilfsquadrate nicht so einfach und gesetzmäßig bilden, wie bei ungerader Felderzahl. Zwar können beispielsweise die Zahlen von 1 bis 6 in alle Reihen der Vorschrift gemäß eingefügt werden, aber nicht die führenden Gruppenzahlen 0, 6, 12, 18, 24, 30. Schubert giebt die obigen Hilfsquadrate (Fig. 51) an,

aus denen sich ein magisches Quadrat mit 36 Feldern bilden läßt. Eine Gesetzmäßigkeit ist aber in dem zweiten Hilfsquadrate kaum zu entdecken.

Eine höchst interessante Methode zur Bildung magischer Quadrate, die noch den Vorteil bietet, daß sie auf Quadrate mit beliebig hoher Seitenzahl ausgedehnt und angewendet werden kann, ist die der diagonalen komplementären Kreuze. Sie ist anwendbar für sämmtliche Quadrate mit gerader Felderzahl. Sämmtliche dabei vorkommenden Linienzüge, durch welche die Einzählung bedingt wird, sind den Hauptdiagonalen parallel und liegen in den durch diese gebildeten Viertelkreisen.

Ziehen wir in einem Quadrat von gerader Seitenzahl (n) diagonale Kreuze in der Art, wie die Fig. 52 zeigt und ordnen die Linien einander so zu, daß jeder Linienzug 2n Felder enthält, also stets genau so viel, wie beide Diagonalen zusammen, so kann man die Felder dieser Linienzüge abwechselnd von zwei gegenüberliegenden Ecken aus einzählen oder von allen vieren aus. Wir haben dies durch Buchstaben in den Anfangsfeldern jedes Linienzuges zur Anschauung gebracht. Die Diagonalen bilden dabei die vier Quadranten und der kleinste Linienzug jedes Quadranten ist komplementär zum größten Linienzuge des benachbarten Quadranten und umgekehrt. An Stelle von b und c kann auch wieder a und d treten. Gegenüberliegende Züge tragen dieselben Buchstaben, benachbarte symmetrisch zur Diagonale liegende dagegen den Buchstaben der Gegenecke mit Ausnahme derjenigen, die gleich groß sind, also in der Mitte liegen. Diese haben wieder denselben Buchstaben, in unserem Falle b. Das gemäß dieser Vorschrift ausgefüllte Quadrat ist, wie Fig. 53 und 54 zeigt, ein vollkommenes magisches. Wir wollen dasselbe einen Zwilling nennen. Die

Fig. 52.



Bildungsweise führt für alle Quadrate zum Ziel, deren Seitenlänge den Faktor Vier enthält. Für ein Quadrat mit der Seiten-

Fig. 53.

1	63	6	60	61	3	58	8
49	10	54	13	12	51	15	56
24	42	19	45	44	22	47	17
40	31	35	28	29	38	26	33
32	39	27	36	37	30	34	25
48	18	43	21	20	46	23	41
9	50	14	53	52	11	55	16
57	7	62	4	5	59	2	64

Fig. 54.

	a	d	a	d	d	a	d	a
a	1	63	3	61	60	6	58	8
d	56	10	54	12	13	51	15	49
d	48	47	19	45	44	22	42	41
a	25	39	38	28	29	35	33	32
a	33	31	30	36	37	27	26	40
d	24	23	43	21	20	46	18	17
d	16	50	14	52	53	11	55	9
a	57	7	59	5	4	62	2	64

zahl Vier giebt der Zwilling die bereits oben erwähnte Lösung (siehe Fig. 55).

Haben wir nun ein Quadrat mit sechs Feldern in jeder Seite, so bilden wir einen Drilling in folgender Weise (Fig. 56 und 57). Die Hauptdiagonalen zählen wir nach irgend einem Buchstaben, z. B. a, ein, der dann nicht wieder vorkommt. Die beiden andern Linienzüge zählen wir derart mit je 12 = 36/3 Zahlen ein, daß der eine auf der linken und rechten Hälfte die Buchstaben b bez. d erhält, der andere dagegen auf der oberen und unteren Hälfte die Buchstaben c bez. d. Man denkt sich also das Quadrat durch die beiden Mittellinien EF und GH zerlegt und giebt jeder Hälfte einen derjenigen beiden Buchstaben, die zu einer dieser Hälften gehören, wobei der Buchstabe a, wie gesagt, ausgeschlossen ist. Jedes Feld erhält dann wieder diejenige Zahl, von welcher

Fig. 55.

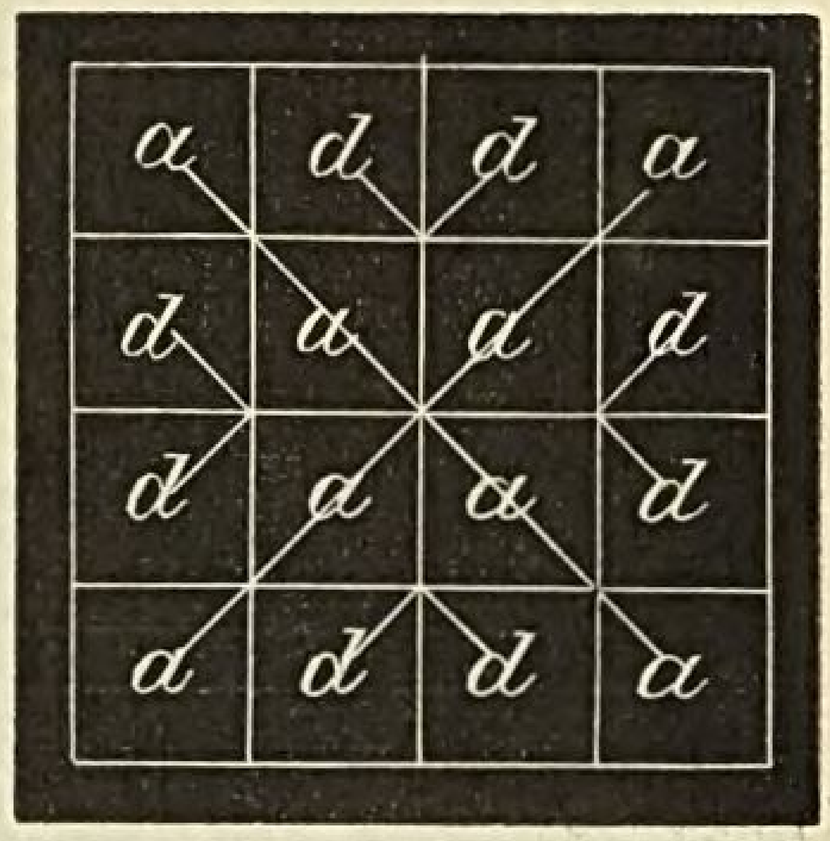
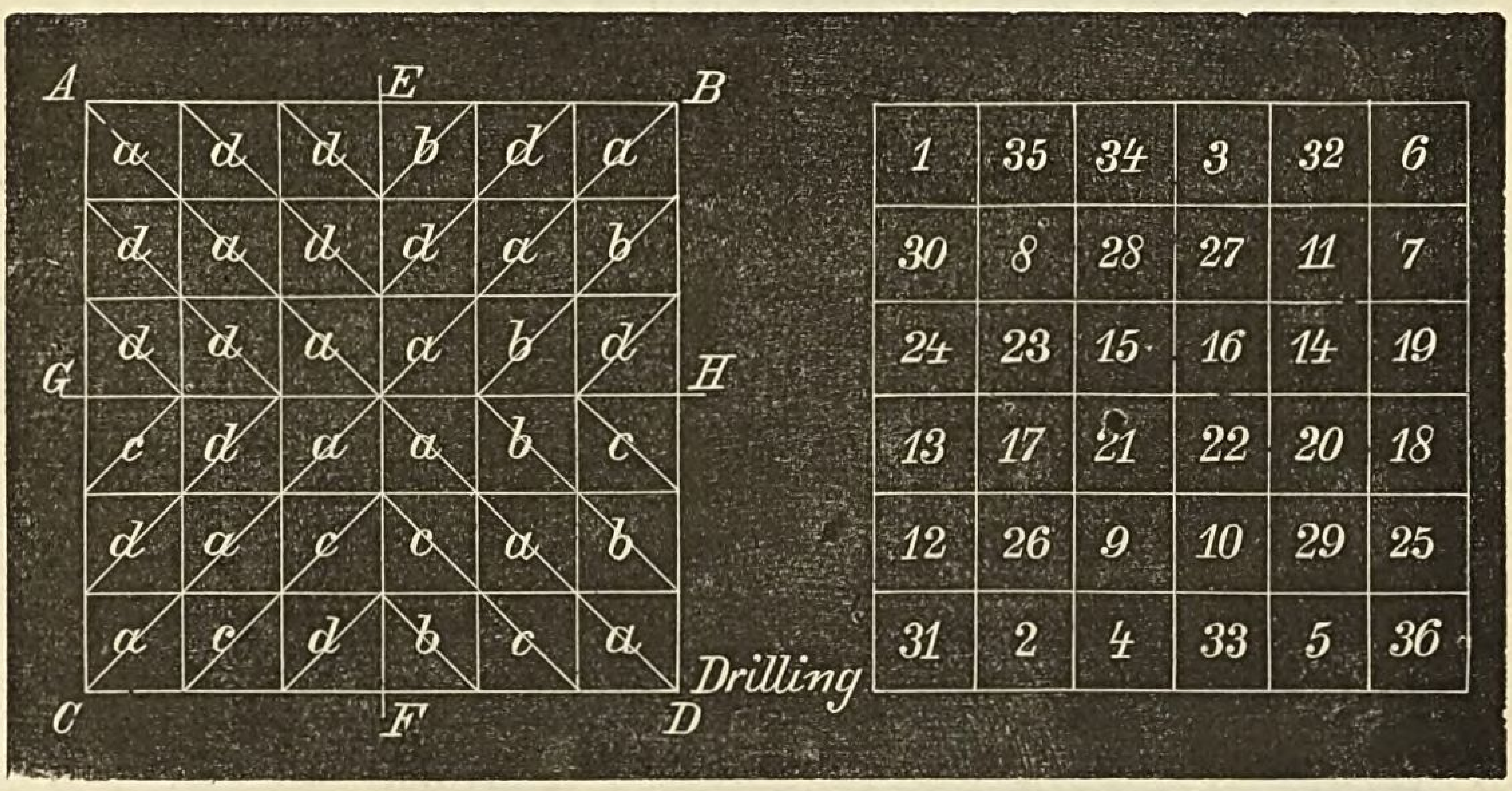


Fig. 56.



1	35	34	3	32	6
30	8	28	27	11	7
24	23	15	16	14	19
13	17	21	22	20	18
12	26	9	10	29	25
31	2	4	33	5	36

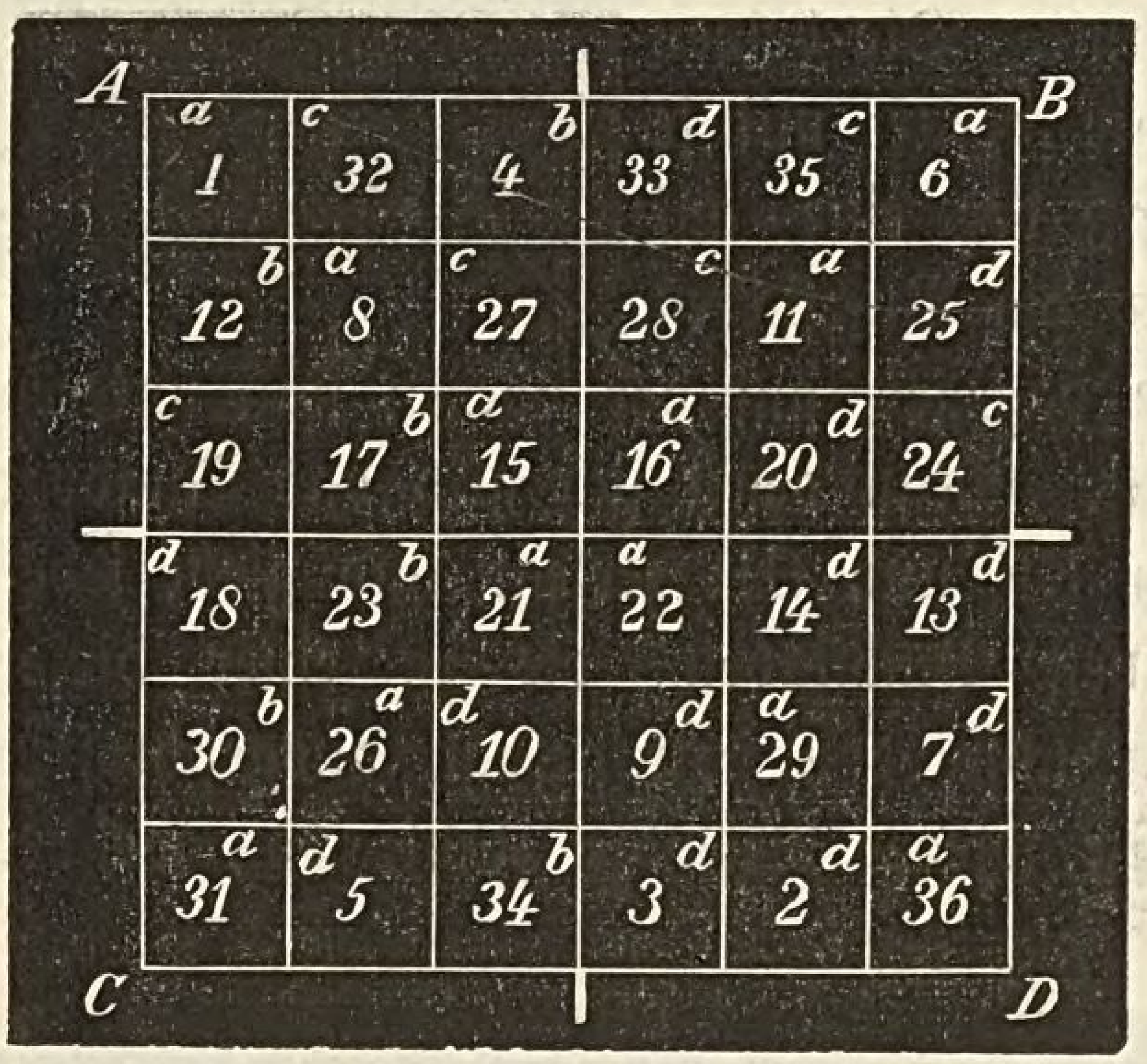
es beim Einzählen von der ihm zugehörigen Ecke aus betroffen wird. In jedes Kreuz werden gleich viel Zahlen, also je zwölf, eingezählt. Das Quadrat ist, wie die Ausfüllung zeigt, ein vollkommenes magisches. Jedes eingezählte Kreuz hat die Summe

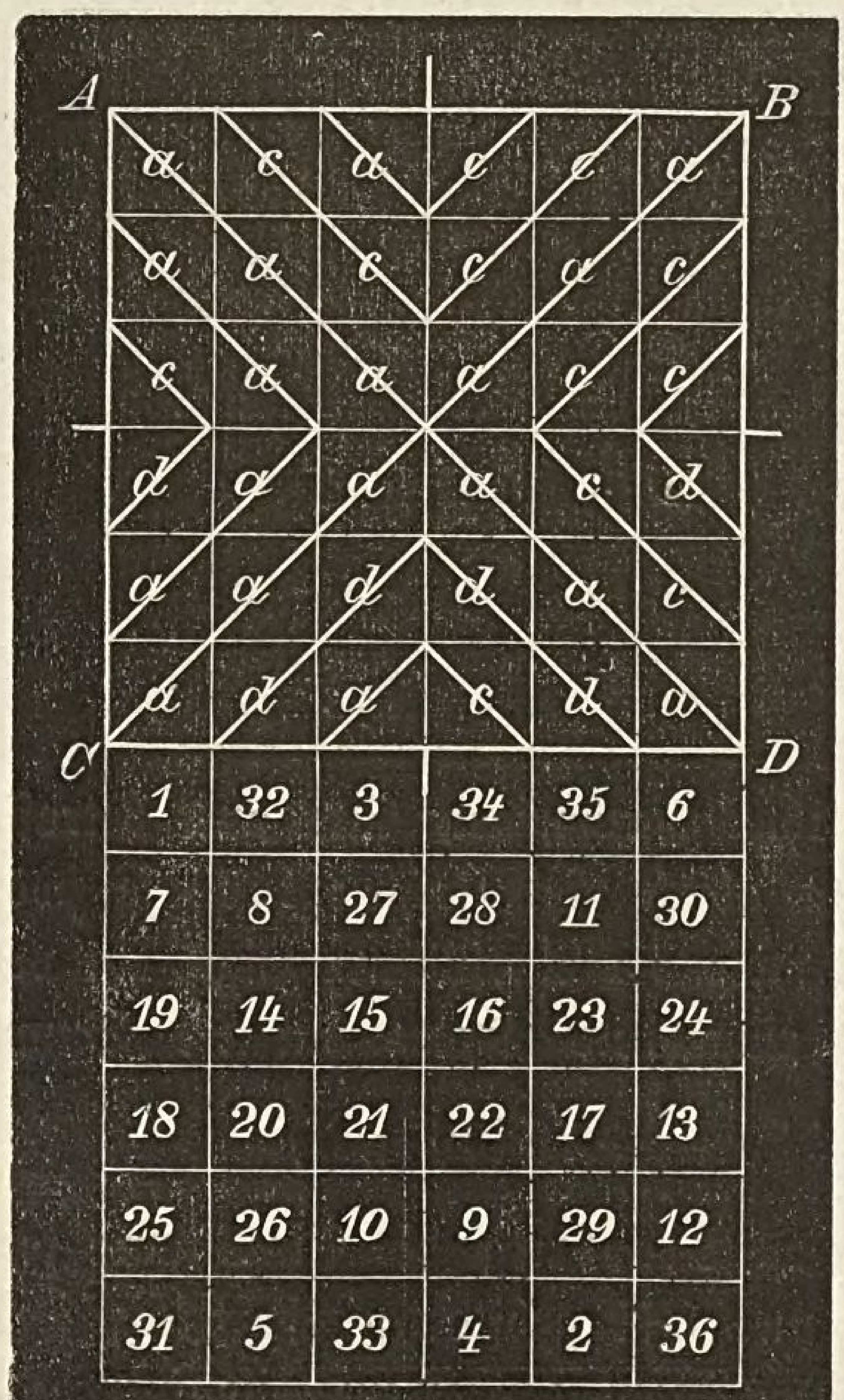
$$3\,(n^2 + 1) = 111 = \frac{1}{2} \times 6\,(36 + 1).$$

Schließlich nennen wir einen Vierling die Einzählung jedes der durch die Mittellinie EF und GH gebildeten Viertelkreise von einer besonderen Ecke aus. Die Wahl der Kreuze ist hierbei an

die Bedingung geknüpft, daß dieselbe in zwei Paaren vorhanden sind, in denen die beiden Kreuze gleichen Abstand von einander haben. Die Lage des vierten Kreuzes ist abhängig von derjenigen der drei andern, die beliebig sind. Wir können die Reihenfolge der Einzählung durch folgende Symbole ausdrücken:

Fig. 57.





$$\frac{ad}{da} + \frac{da}{ad} + \frac{da}{ad} + \frac{ad}{da}$$

$$\frac{bc}{cb} + \frac{cb}{bc} + \frac{cb}{bc} + \frac{bc}{cb}$$

$$\frac{ad}{bc} + \frac{bc}{ad} + \frac{da}{cb} + \frac{cb}{da}$$

$$\frac{ac}{db} + \frac{db}{ac} + \frac{ca}{bd} + \frac{bd}{ca}$$

Jede dieser Reihen stellt einen Vierling dar, jeder Summand ein Kreuz, jeder Buchstabe deutet durch seine Stellung den Viertelkreis an, welcher nach ihm eingezählt wird. Ein Vierling liefert die Summe $4(n^2 + 1)$, die doppelte Summe wie der Zwilling. Wir wollen die möglichen Kombinationen der Zwillinge und Drillinge durch ähnliche Symbole ausdrücken. Alle möglichen Zwillinge, welche die horizontale und vertikale Summe $2(n^2 + 1)$ liefern, sind die ganzen Kreuze a + d und b + c und die halben ac + bd und

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$. Alle Drillinge, welche die Summe $3(n^2 + 1)$ liefern, sind $a + db + \frac{d}{c}$, $b + ca + \frac{c}{d}$, $c + bd + \frac{b}{a}$, $d + ac + \frac{a}{b}$. Der vorhin dargestellte Zwilling hatte die Form $ac + bd$, der Drilling hatte die Form $a + bd + \frac{d}{c}$.

Jetzt können wir die allgemeine Lösung des Problems der magischen Quadrate andeuten. Man stellt die halbe Seitenzahl des Quadrats dar durch eine Summe $2p + 3q + 4r$. Dann lassen sich die in der bekannten Weise erhaltenen Kreuze des Quadrats in p Zwillinge, q Drillinge und r Vierlinge gruppiren. Diese werden mit denjenigen Buchstaben beschrieben, welche dem gewählten Symbol des Zwillings, Drillings oder Vierlings entsprechen und darauf jedes Feld mit der Zahl versehen, welche seinem Buchstaben

Fig. 58.

A	a	a	d	d	a	c	d	d	a	a	B
a	1	2	98	97	5	96	94	93	9	10	a
a	11	12	13	87	86	85	84	18	19	90	c
d	80	22	23	24	76	75	27	28	79	21	b
d	70	69	33	34	35	36	37	68	32	31	b
a	41	59	58	44	45	46	57	43	42	50	a
b	60	49	48	54	55	56	47	53	52	51	b
d	40	39	63	64	66	65	67	38	62	61	b
d	30	72	73	77	26	25	74	78	29	71	b
a	81	82	88	17	16	15	14	83	89	20	c
a	91	99	8	7	95	6	4	3	92	100	a
C	a	b	d	d	a	o	d	d	b	a	D

entspricht. Für ein magisches Quadrat mit 24 Feldern an jeder Seite hätte man also 12 Kreuze, welche entweder als 6 Zwillinge oder 4 Drillinge oder 3 Vierlinge einzuzählen sind, oder auch durch Kombination von zwei Zwillingen und zwei Vierlingen, vier Zwil-

lingen und einem Vierling, drei Zwillingen und zwei Drillingen oder endlich von einem Zwilling, einem Vierling und zwei Drillingen erhalten werden können. Wir wollen hier nun planmäßig ein magisches Quadrat mit der Seite 10 bilden (Fig. 58 und 59). Die Hauptdiagonalen besetzen wir mit dem Buchstaben a, da sie

Fig. 59.

A	a	a	d	b	c	c	d	d	a	a	B
a	1	2	98	7	95	96	94	93	9	10	a
c	81	12	13	87	16	85	84	18	19	90	c
b	30	72	23	24	76	75	27	28	79	71	d
a	31	39	63	34	35	36	37	68	62	40	a
d	60	42	48	54	45	46	57	53	49	51	d
d	50	59	58	44	55	56	47	43	59	41	d
b	70	69	33	64	66	65	67	38	32	70	b
b	80	22	73	77	26	25	74	78	29	21	d
c	11	82	88	17	86	15	14	83	89	20	c
a	91	99	8	97	5	6	4	3	92	100	a
C	a	b	d	b	c	c	d	d	b	a	D

von der Ecke A aus eingezählt werden sollen. Dann überschlagen wir (Fig. 58) in horizontaler Richtung zwei Felder, in vertikaler eines und zählen die dort beginnenden Halbkreuze, welche ja einander komplementär sind, mit dem Buchstaben d ein. Jetzt haben wir einen Zwilling gebildet, die übrigen Felder werden als Drilling besetzt; das eine Kreuz des Drillings bilden die Diagonalen, welche mit dem Buchstaben a bereits besetzt sind. Die beiden andern Kreuze werden der obigen Vorschrift gemäß besetzt, wie die Ränder der Figur angeben. Es sind die beiden Formen in Fig. 58 und 59 gemäß der Zerlegung $10 = 2(2 + 3)$ gebildet. Der berühmte französische Zahlentheoretiker Fermat hat eine Menge Schriften über unsern Gegenstand verfaßt. Er sandte dem Jesuitenpater Mersenne,

einem um die Mathematik und Physik sehr verdienten Manne, ein Quadrat von 144 Feldern, welches er durch Hinzufügung weiterer Ringe zu einem Quadrat mit 22 Feldern an jeder Seite, also 484 im Ganzen, zu erweitern gedachte. Er hat jedoch das Quadrat nicht vollendet und Lucas hat sich der Mühe unterzogen, in Fermats Sinne dasselbe zu vollenden, wozu es noch fünf weiterer Ringe bedurfte. Hier folgt die seltsame Arbeit (Fig. 60). Die Summe in jeder Reihe ist:

$$11 \times (484 + 1) = 5335.$$

Jeder zum Mittelpunkt symmetrisch belegene quadratische Ausschnitt ist natürlich wieder ein magisches Quadrat. Die Summe je zweier symmetrisch gelegener Zahlen ist $= 485$. Wir könnten nach unserer Methode ein gleich großes Quadrat bilden, indem wir die entstehenden Kreuze in vier Zwillinge und einen Drilling $[2\,(4 \times 2 + 3)]$ oder in einen Zwilling und drei Drillinge $[2\,(2 + 3 \times 2)]$ gruppirten. Daß eine große Anzahl verschiedener Formen möglich ist, wird aus der Bemerkung hervorgehen, daß für jeden Zwilling, Drilling oder Vierling irgend eine beliebige Ecke des Quadrats zum Anfangspunkt genommen werden und daß man sowohl in horizontaler, wie auch in vertikaler Richtung, nach oben oder unten weiterzählen kann. Erwähnen wollen wir noch, daß man die Vierlinge auch als symmetrische quadratische Ringe eintragen kann, die mit den Hauptquadraten Winkel von 45° bilden, also übereck stehen. Als Beispiel diene die Fig. 61, die nach dem Schema $\frac{ad}{bc} + \frac{bc}{ad} + \frac{da}{cb} + \frac{cb}{da}$ gebaut ist. Das innerste übereck stehende Quadrat hat einen Buchstaben in jeder Seite, zu ihm gehört das fünfte, mit je drei Buchstaben in der Seite, die mit den vorigen übereinstimmend gelagert sind.

Man hat diese Methoden auch auf Würfel ausgedehnt. Wir wählen als Beispiel den vollkommenen magischen Würfel mit vier Feldern an jeder Seite, im Ganzen demnach $4^3 = 64$ Feldern. Er soll die Zahlen von 1 bis 64 enthalten und kann durch Einzählung von zwei gegenüberliegenden Ecken a und h der körperlichen Diagonale aus erhalten werden. Denken wir uns also den Würfel in 64 kleine Würfelchen zerlegt, welche in vier Reihen zu

Fermat's großes magisches Quadrat,

23	464	459	457	109	111	108	110	132	133	130
25	41	436	435	433	432	196	195	241	242	200
27	45	13	474	469	467	82	81	72	90	91
461	55	15	34	450	449	447	446	156	157	180
456	56	17	42	3	484	479	477	66	65	68
137	428	471	41	5	127	126	125	361	362	363
153	431	466	31	7	347	148	338	339	145	143
154	439	98	453	481	325	161	169	168	318	319
384	266	407	445	476	292	293	191	190	299	298
383	268	406	442	424	270	280	272	273	211	210
379	265	392	172	60	248	227	250	251	230	232
378	267	391	173	59	226	249	228	229	252	254
351	282	405	176	74	204	214	206	207	277	276
350	263	390	177	73	182	192	301	300	189	187
334	199	77	330	423	171	315	323	322	164	165
333	216	96	311	413	149	346	147	146	340	341
100	221	76	310	414	369	359	360	124	123	122
99	223	75	291	483	1	6	8	419	420	417
104	202	97	452	35	36	38	39	329	328	305
105	238	473	11	16	18	403	404	393	395	394
136	438	49	50	52	53	289	290	244	243	285
463	21	26	28	376	374	377	375	353	352	355

ergänzt von Ed. Lucas.

131	373	371	357	356	372	382	370	335	30	22
225	284	287	246	245	288	261	51	58	47	460
83	401	400	396	398	399	397	20	12	440	458
181	326	327	306	307	44	37	33	470	430	24
67	422	421	416	415	10	2	443	468	429	29
364	365	366	118	117	116	480	444	14	57	348
342	142	344	345	139	138	478	454	19	54	332
320	321	163	162	324	160	4	32	387	46	331
297	186	185	184	302	193	9	40	78	219	101
209	208	278	279	205	215	61	43	79	217	102
231	233	256	257	258	237	425	313	93	220	106
253	255	234	235	236	259	426	312	94	218	107
275	274	212	213	271	281	411	309	80	203	134
188	296	295	294	183	303	412	308	95	222	135
166	167	317	316	170	314	62	155	408	286	151
144	343	141	140	337	336	72	174	389	269	152
121	120	119	367	368	358	71	175	409	264	385
418	63	64	69	70	475	482	194	410	262	386
304	159	158	179	178	441	448	451	388	283	381
402	84	85	89	87	86	88	465	472	247	380
260	201	198	239	240	197	224	434	427	437	349
354	112	114	128	129	113	103	115	150	455	462

Fig. 61.

c	d	b	a	d	c	a	b	57	63	6	4	60	62	7	1
d	b	a	c	b	d	c	a	56	15	11	52	12	51	55	16
b	a	c	d	a	b	d	c	24	18	43	45	21	19	42	48
a	c	d	b	c	a	b	d	25	34	38	29	37	30	26	33
b	d	c	a	d	b	a	c	40	31	27	36	28	35	39	32
a	b	d	c	b	a	c	d	41	47	22	20	44	46	23	17
c	a	b	d	a	c	d	b	9	50	54	13	53	14	10	49
d	c	a	b	c	d	b	a	8	2	59	61	5	3	58	64

je sechszehn übereinander liegen, so wird die unterste Schicht nach dem Schema Fig. 62a, die nächste nach Fig. 62b, die dritte wie

Fig. 62a.

a	h	h	a
h	a	a	h
h	a	a	h
a	h	h	a

Fig. 62b.

h	a	a	a
a	h	h	a
a	h	h	a
h	a	a	h

die zweite und die letzte wie die erste eingezählt. Das giebt der Reihe nach:

Fig. 62.

1	63	62	4
60	6	7	57
56	10	11	63
13	51	50	16

48	18	19	45
21	43	42	24
25	39	38	28
36	30	31	33

(Zu Fig. 62.)

32	34	35	29
37	27	26	40
41	23	22	44
20	46	47	17

49	15	14	52
12	54	55	9
8	58	59	5
61	3	2	64

Wie weit geht nun die Vollkommenheit des Würfels? Wir müssen aufsuchen, wo vier Zahlen die Summe $130 = 2\,(64 + 1)$ bilden.

1. Jeder mit einer Seitenfläche parallele Schnitt ist magisch, jedoch nicht bezüglich der Diagonalen.

2. Jede Fläche einer Haupt- oder körperlichen Diagonale ist in derselben Art magisch, und ebenso hat jede körperliche Diagonale dieselbe Summe.

3. Jede oktaedrische Doppelfläche enthält 32 Zahlen mit der konstanten Summe 1040 von zwei magischen Quadraten und jede aus gegenüberliegenden Seitenflächen bestehende Hälfte einer oktaedrischen Doppelfläche enthält die konstante Summe 520; das aus parallelen Seitenflächen bestehende Viertel des Oktaeders hat die konstante Summe 260 eines halben magischen Quadrats.

Die Richtigkeit der ersten Behauptung ist leicht aus obigem Schema nachzuweisen. Suchen wir nun die beiden Flächen der Hauptdiagonalen, so haben wir die zugehörigen Diagonalen jeder Fläche untereinander zu stellen (Fig. 63); dies giebt

Fig. 63.

a	a	a	a
h	h	h	h
h	h	h	h
a	a	a	a

1	6	11	16
48	43	38	33
32	27	22	17
49	54	59	64

(Zu Fig. 63.)

und

4	7	10	13
45	42	39	36
29	26	23	20
52	55	58	61

In beiden Formen geben die vertikalen Reihen, die zu den Kanten des Würfels parallel laufen, dieselbe Summe 130, außerdem aber auch die vier Hauptdiagonalen 1, 43, 22, 64; 16, 38, 27, 49; 4, 42, 23, 61; 13, 39, 26, 52. Die oktaedrischen Doppelflächen enthalten folgende komplementäre Paare mit der Summe 65:

1—64 63 5 62 9 4 52 57 14 53 15 16—49
6—59 7 55 11—54
60 2 56 3 10 58 51 8 50 12
13 61

4—61 62 8 63 12 1 49 60 15 56 14 13—52
7—58 6 54 10—55
57 3 53 2 11 59 50 5 51 9
16 64

Diese Paare gehören der ersten und zweiten Fläche an, analoge lassen sich aus der zweiten und dritten bilden. Jede oktaedrische Doppelfläche enthält die Hälfte aller Zahlen, in unserem Falle also zweiunddreißig. Wir unterlassen es, dieselben hier zusammenzustellen, da jeder, der sich in die Verhältnisse einarbeitet, mit Leichtigkeit die Formen bilden kann.

Unsern Würfel können wir als Zwilling betrachten, der nach der Formel a + h gebaut ist. Man hätte ihn auf Grund der Symmetrie auch aus irgend zwei anderen gegenüberliegenden körperlichen Ecken einzählen können. Genau so kann man für einen Würfel mit der Seitenzahl 8, 16, 32 u. s. f. verfahren. Für den Würfel mit den Seitenzahlen 6, 10, 14, 18 u. s. f. bedarf

es dagegen der Einzählung nach dem Typus des Drillings, um analoge magische Formen zu erhalten. Scheffler führt in seinem Werke („Die magischen Quadrate", S. 100) einen Würfel mit $6^3 = 216$ Zahlen an, bei welchem die konstante Summe $= \frac{1}{2} \times 6\,(6^3 + 1) = 651$ ist. Das Prinzip des Aufbaues ist genau dasselbe, wie für die Quadrate. Ebenso steht es mit den Würfeln von ungerader Seitenzahl, die man wohl am einfachsten nach dem Verfahren mit dem übereck

Fig. 64.

87	118	24	30	56
18	49	55	81	112
74	80	106	12	43
105	6	37	68	99
31	62	93	124	5

53	84	115	16	47
109	15	41	72	78
40	66	97	103	9
91	122	3	34	65
22	28	59	90	116

44	75	76	107	13
100	101	7	38	69
1	32	63	94	125
57	88	119	25	26
113	19	50	51	82

10	36	67	98	104
61	92	123	4	35
117	23	29	60	86
48	54	85	101	17
79	110	11	52	73

121	2	33	64	95
27	58	89	120	21
83	114	20	46	52
14	45	71	77	108
70	86	102	8	39

stehenden normal eingezählten Würfel erhalten kann. Die außerhalb bleibenden Zahlen werden in die Gegenfelder gesetzt. Die so gebildeten Zahlenwürfel sind vollkommen, da jede von links nach rechts,

von vorn nach hinten, von oben nach unten und jede diagonal verlaufende Reihe die Summe $\frac{1}{2} n (n^2 + 1)$ aufweist. Der Würfel in Fig. 64 mit den ersten 125 Zahlen hat demnach in den betreffenden Reihen die Summe $\frac{5}{2} (125 + 1) = 315$.

Zum Schlusse fügen wir noch einige magische Polygone hinzu, ohne auf die Theorie ihrer Bildung näher einzugehen.

Das Sechseck (Fig. 65) enthält die Zahlen von 1 bis 19; der durchschnittliche Wert jeder Zahl ist daher 10. Diese Zahl hat den mittleren Kreis; die sechs Zahlen, welche den ersten Kreis um den Mittelpunkt bilden, haben die Summe 60, die 12 Zahlen des zweiten Kreises die Summe 120. Je drei, vier oder fünf Zahlen in einer, zu einer Seite parallelen Reihe haben die entsprechenden Summen 30, 40 und 50. So findet man neunmal die Summe 20, 23 mal 30, 57 mal 40, 93 mal 50, 147 mal 60, ebenso oft (durch Hinzunehmen der Mittelzahl) 70, 126 mal 80, 82 mal 90, 70 mal 100, ebenso oft 110, 60 mal je 120 und 130, 28 mal 140, 42 mal 150, 23 mal 160, neunmal 170, einmal 180 und 190. Wen diese Figur interessirt, der mag versuchen, Umstellungen dieser Zahlen vorzunehmen, durch welche die Eigenschaften nicht verändert werden, z. B. kann man die Zahlen des ersten Kreises mit den Zahlen der Ecken vertauschen. Von den 96 verschiedenen Sechsecken, die man so bilden kann, folgen hier einige in Fig. 66:

Fig. 65.

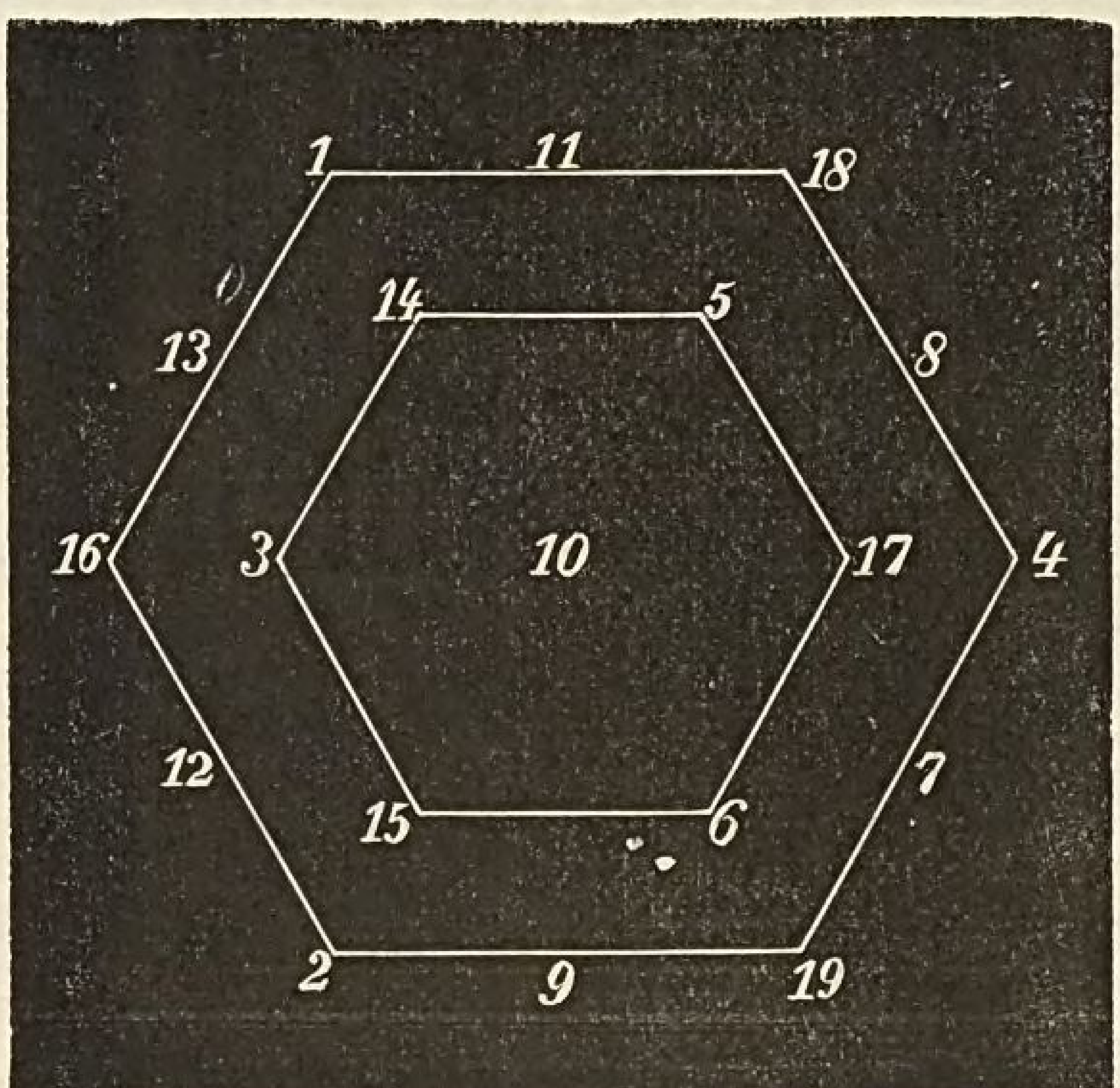


Fig. 66.

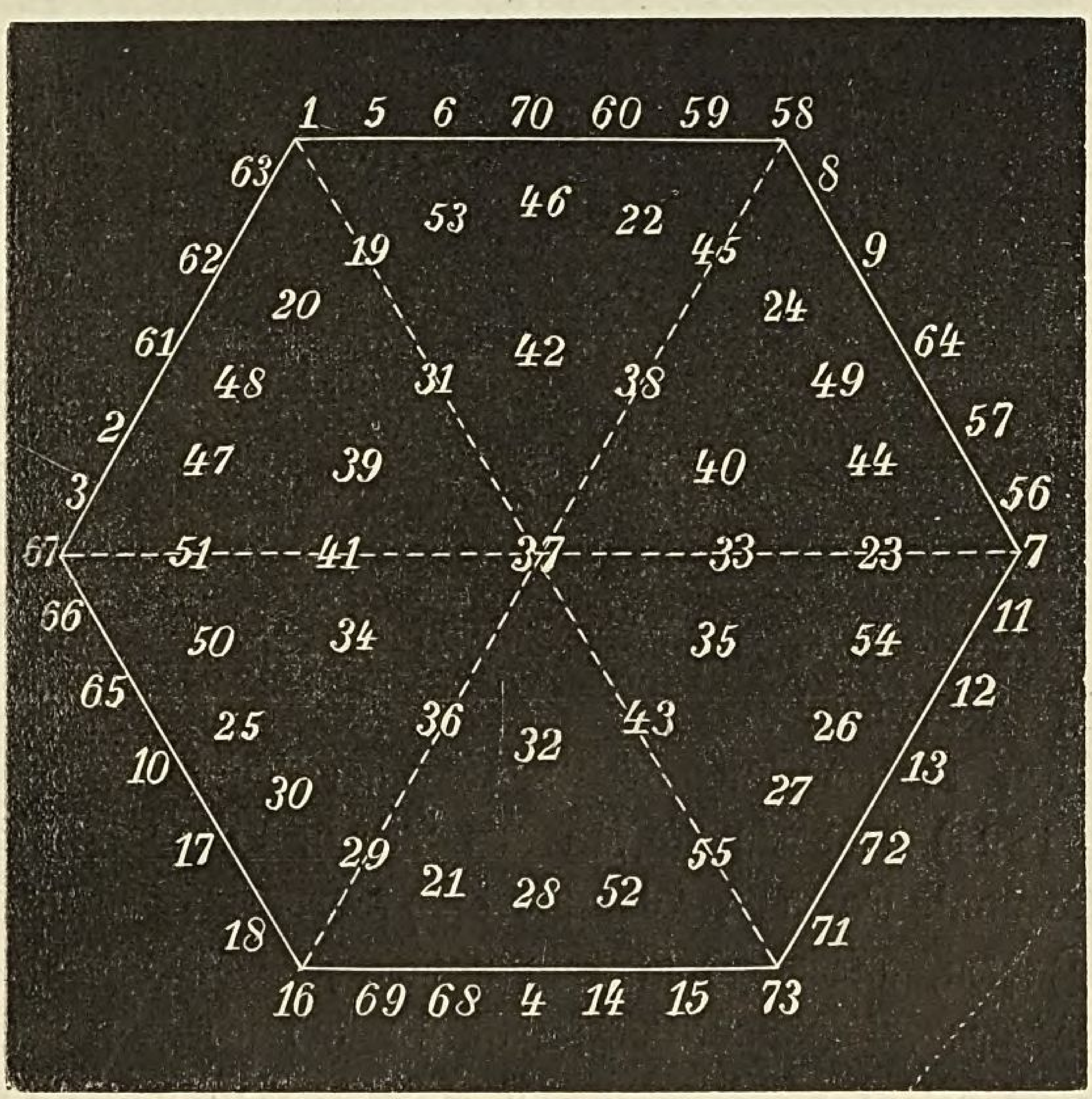
1 16 13 | 18 1 11
15 12 2 11 | 8 15 14 3
14 3 10 17 6 | 4 7 10 13 16
9 18 8 5 | 17 6 5 12
7 4 19 | 9 19 2

(Zu Fig. 66.)

17	1	12			14	1	15		
9	14	15	2		9	17	13	2	
4	7	10	13	16	7	4	10	16	13
18	5	6	11		18	8	3	11	
8	19	3			5	19	6		

Das nächste Sechseck in Fig. 67 besteht aus 73 Zahlen, die mittlere Zahl ist also 37; die drei Sechsecke haben der Reihe nach drei, fünf und sieben Zahlen in jeder Reihe; je zwei sym-

Fig. 67.

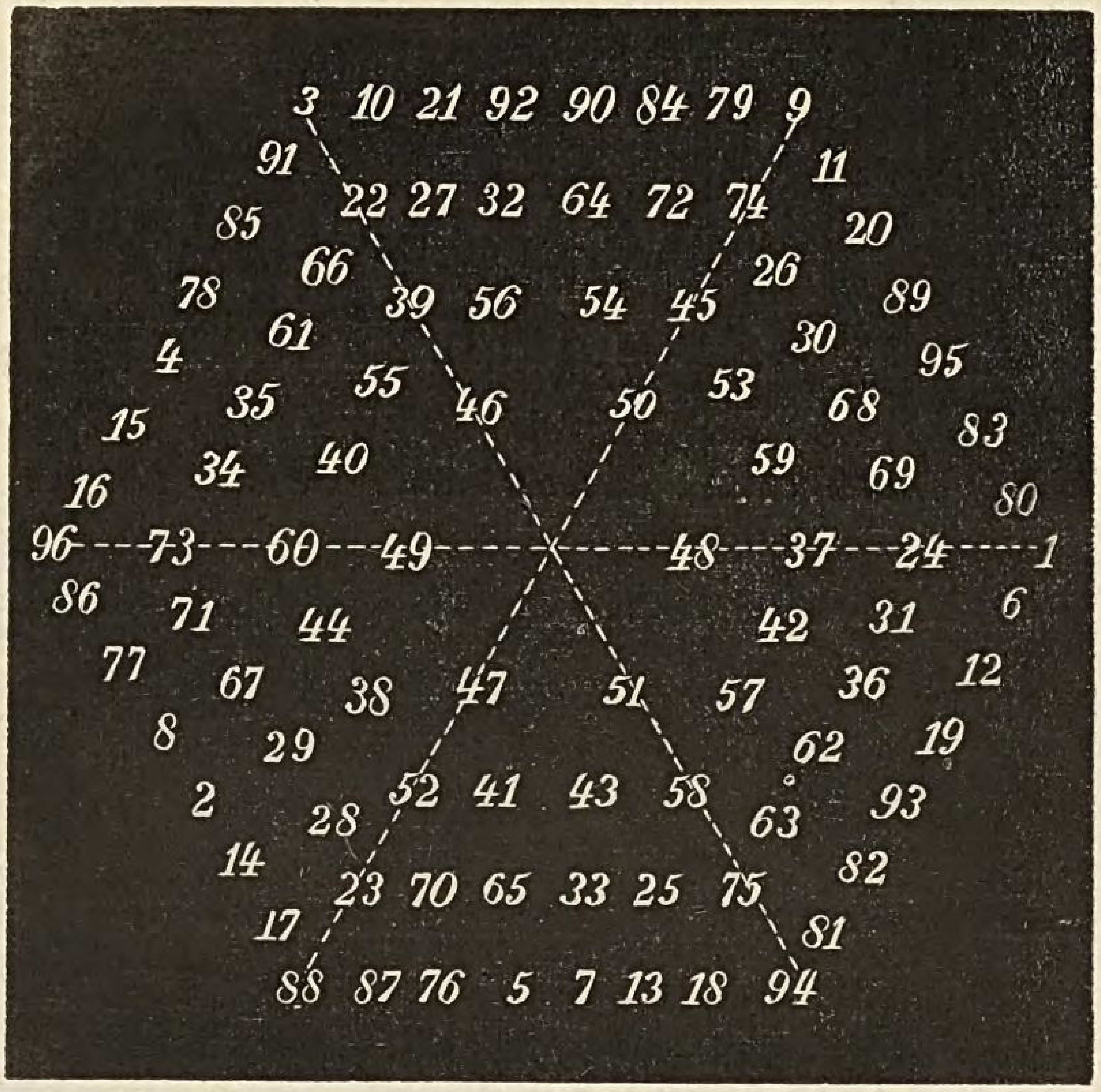


metrische Zahlen haben die Summe 74, jeder größte Durchmesser enthält jedesmal sieben Zahlen mit der Summe $7 \times 37 = 259$ und so fort. Das Sechseck in Fig. 68 enthält 96 Zahlen, hat daher keine Mittelzahl, sondern besteht aus vier konzentrischen Sechsecken mit zwei, vier, sechs und acht Ziffern in jeder Seite. Je zwei symmetrische Zahlen haben die Summe $1 + 96 = 97$; der größte Durchmesser giebt stets die Summe 388 u. s. w.

Aus dem Scheffler'schen Werke entnehmen wir noch folgende beiden Fünfecke (Fig. 69 und 70) mit den Seitenzahlen 8 und 9,

deren erstes die ersten 80 Zahlen enthält, während das zweite die Zahlen von 1 bis 101 umfaßt. Wir überlassen es dem Leser, die

Fig. 68.



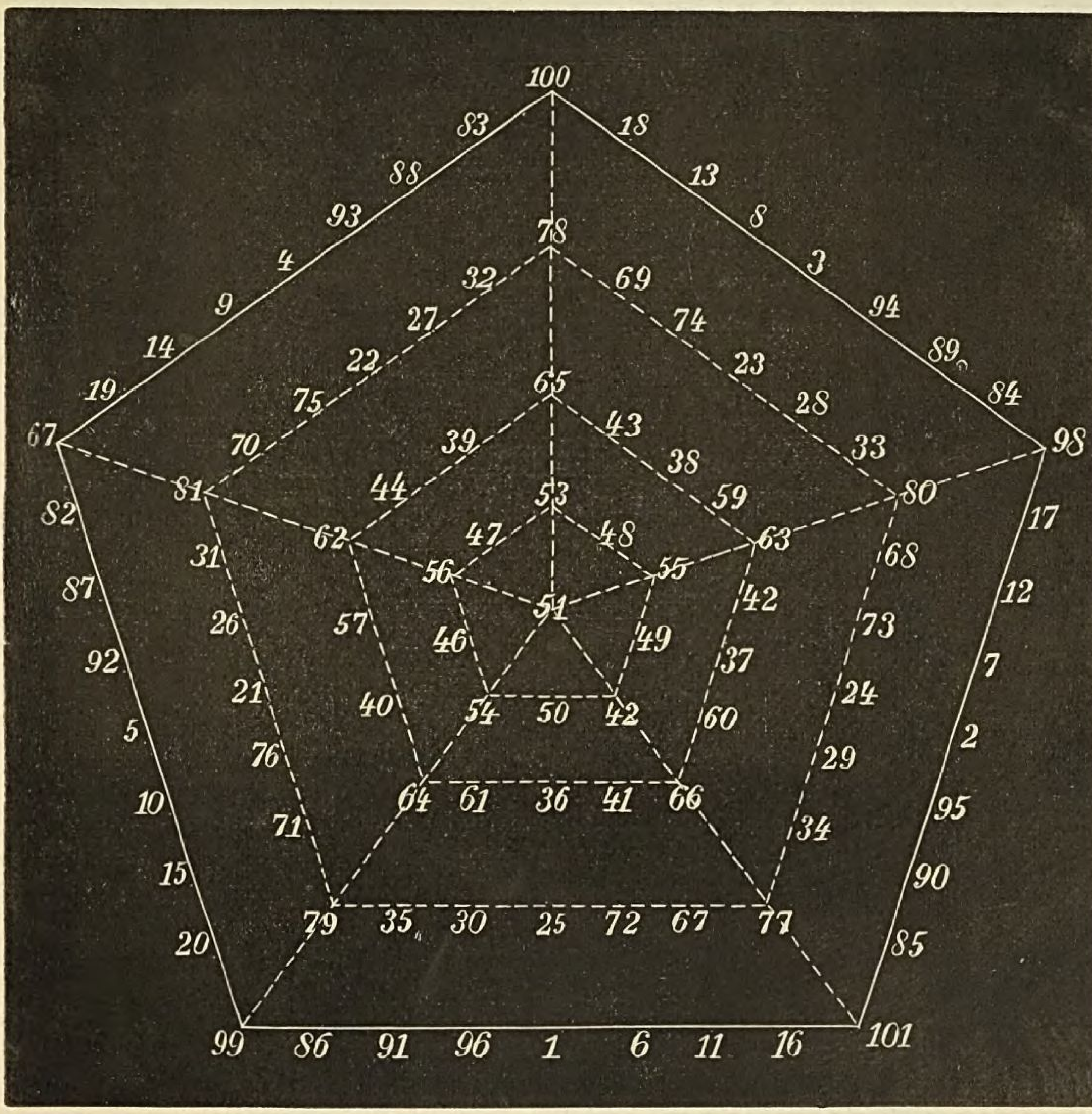
vielen interessanten Eigenschaften dieser beiden magischen Figuren ausfindig zu machen.

In den **Transactions of The Kansas Academy of Science** (1893—1894) steht ein Aufsatz von Bernh. B. Smyth (Topeka), über „**Harmonic Forms**“. Hier findet sich folgendes Sechseck (Fig. 71) mit 37 Zahlen, allerdings nicht in natürlicher Folge und z. T. mit Wiederholungen. Die Mittelzahl ist 20 und jede Linie der Figur giebt so oft die Zahl Zwanzig als Summe, als sie Zahlen enthält. Derselben Arbeit entnehmen wir noch folgende magische Figur mit den Zahlen von 0 bis 23 (Fig. 72). Die Form desselben ist ein übereck stehendes Quadrat, dessen Mittelzahl 12 ist. Die Diagonalen desselben haben die Summe 84 und symmetrisch vom Mittelpunkt abstehende Zahlenpaare auf ihnen haben die Summe 24.

Recht niedlich sind die Eigenschaften des harmonischen Sternes (Fig. 73). Derselbe enthält in den Zahlen die ersten dreizehn Staaten, die den Grundstock der „Vereinigten Staaten“ bildeten. Er ist in jeder Weise vollkommen magisch. Ein symmetrisches Paar

hat die Summe 14, drei ebensolche Zahlen haben die Summe 21, vier betragen 28; die Kreise mit sechs Zahlen haben die Summe 42

Fig. 69.



und so fort. Durch Vertauschung gewisser Zahlen lassen sich 24 verschiedene Formen bilden.

Die Fig. 74 zeigt vier konzentrische Kreise mit vier in den Richtungen der Windrose gezogenen Durchmessern. Die Sektoren der Ringe sind durch Diagonalen verbunden, aber nicht geradlinig, sondern so, daß die aneinander grenzenden Teile derselben Kurven bilden. Diese Kurven sind in der Mathematik als Rollkurven (Cycloiden) und als Herzkurven (Cardioiden) bekannt. Nun bilden je acht Zahlen, welche sich in den Ringsektoren befinden, auf mancherlei Weise die konstante Summe 132. Zunächst auf vier Durchmessern,

dann auf vier Kreisen, ferner auf vier Rolllinien und auf vier Herzkurven. Die Zahlen freilich sind nicht die fortlaufenden der

Fig. 70.

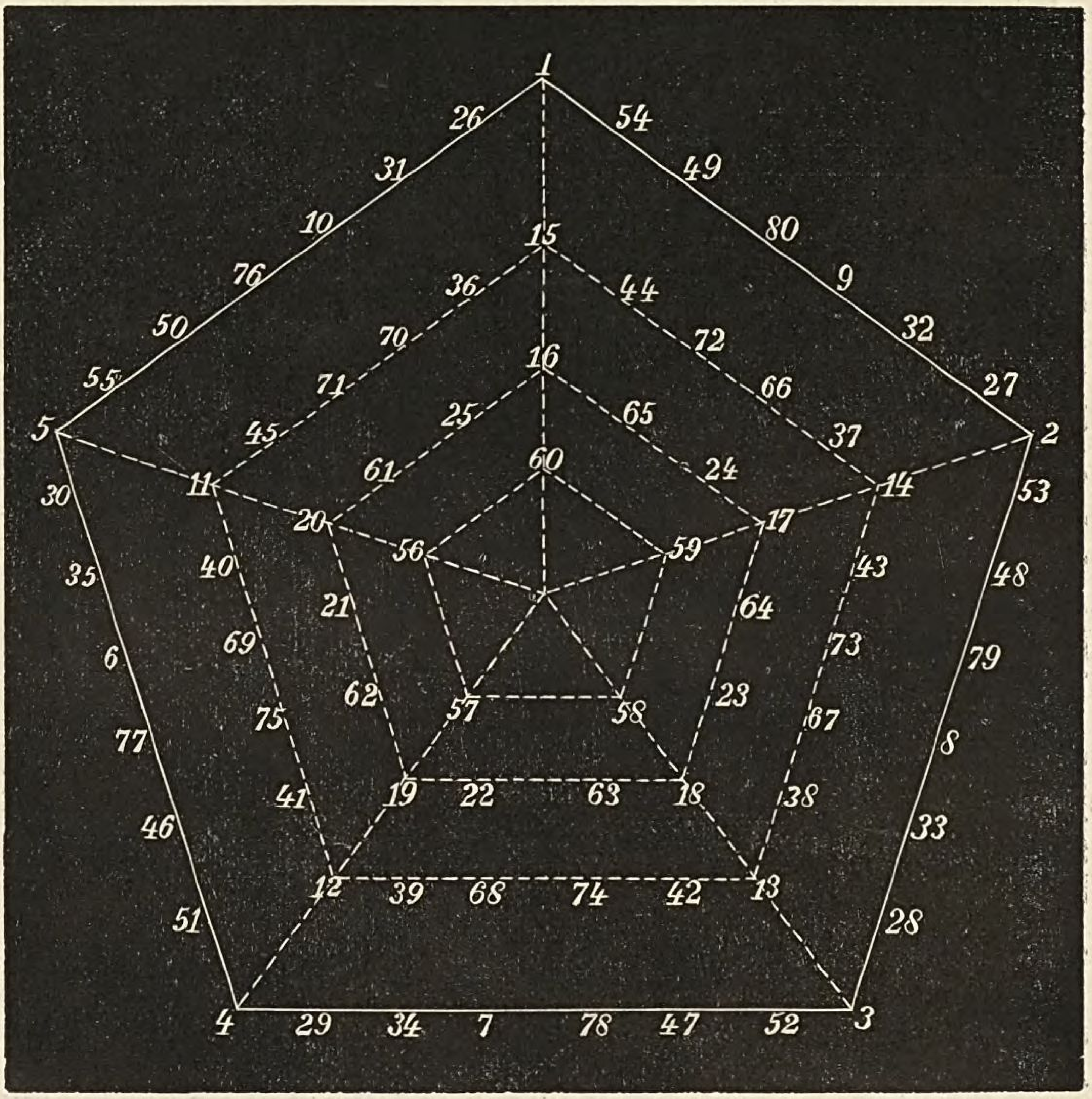
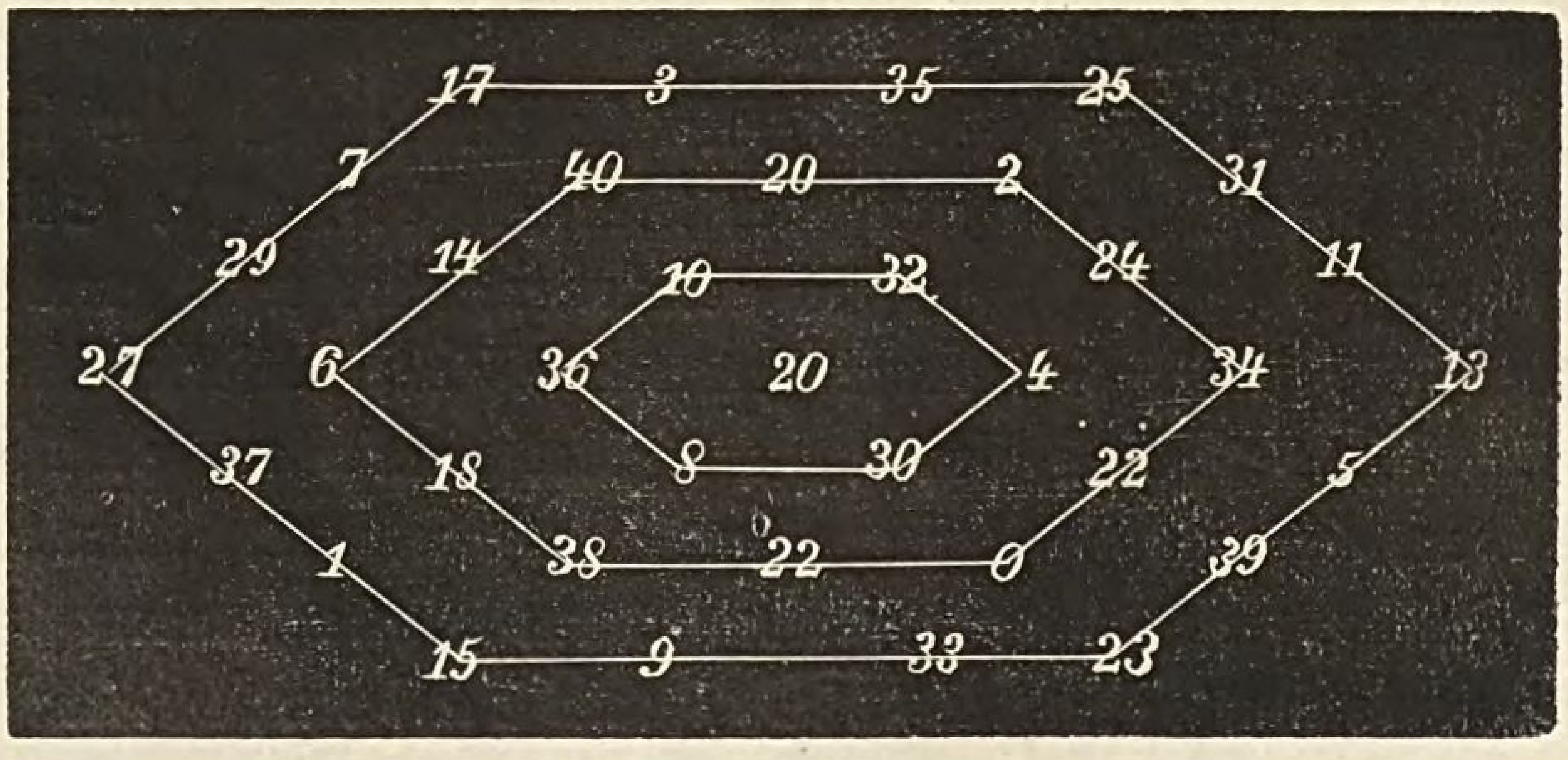
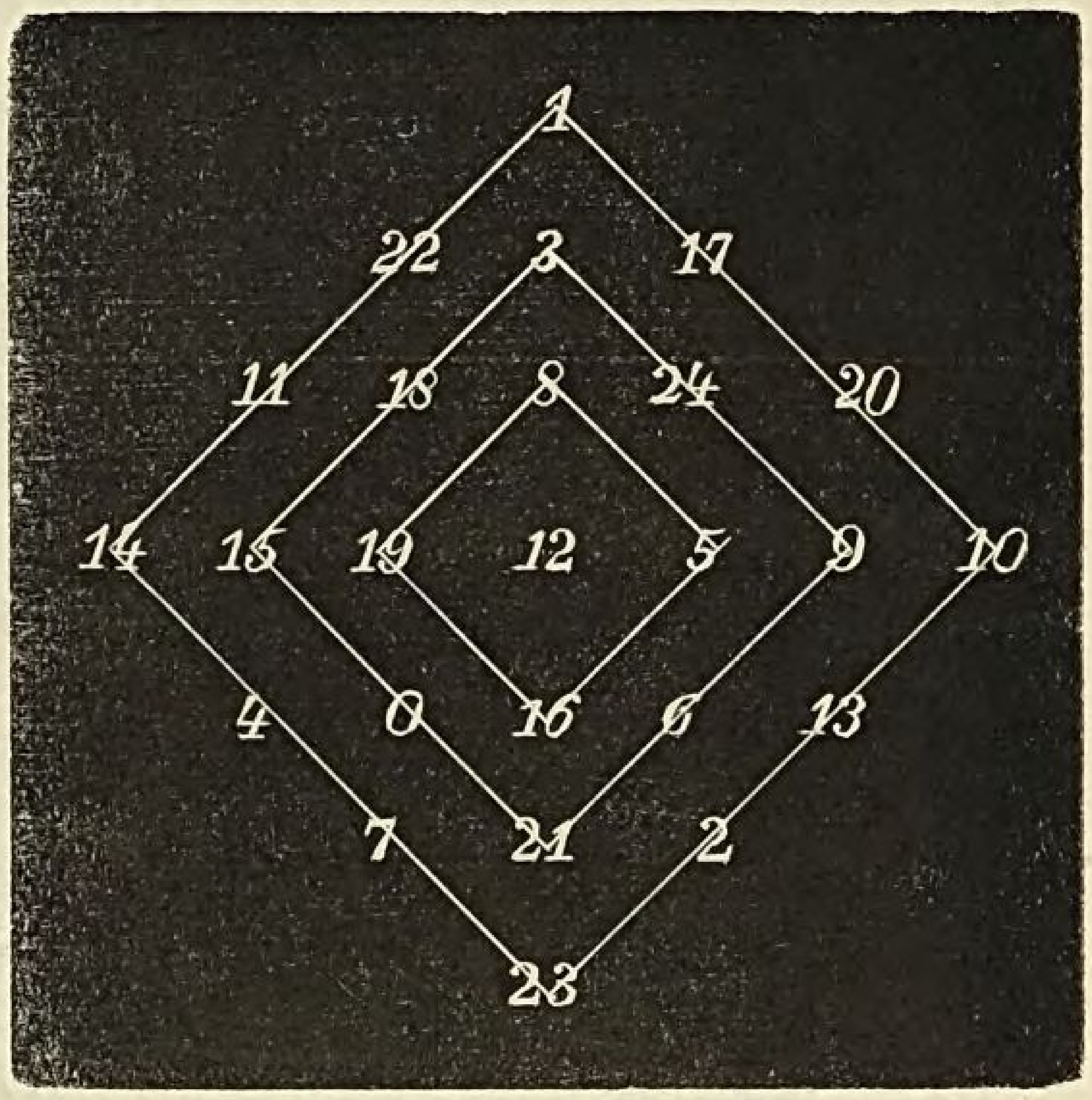


Fig. 71.



natürlichen Zahlenreihe, nichtsdestoweniger ist aber die Figur sehr interessant. Scheffler hat auch die Gesetze der Bildung magischer Polygone in klarer Weise entwickelt. Wir entnehmen seiner Arbeit noch folgende Formen (Fig. 75).

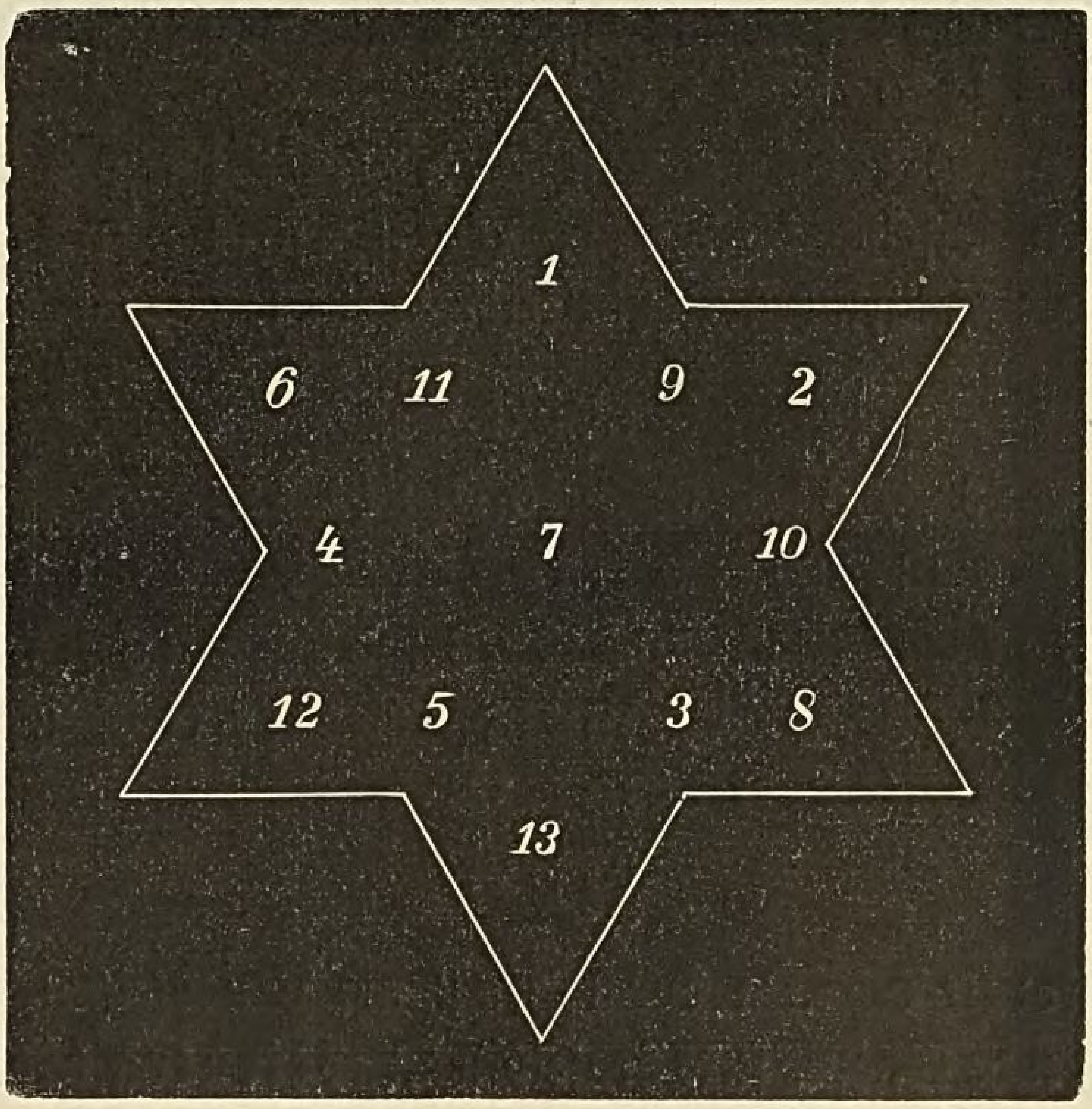
Fig. 72.



Dies sind drei magische Dreiecke, das erste mit den ersten sieben Zahlen, das zweite mit den ersten 27 Zahlen, das dritte mit den ersten zwölf Zahlen.

Die erste der drei Formen in Fig. 76 ist ein magisches Fünfeck mit ungerader Seitenzahl, welches die Zahlen 1 bis 31 enthält, die 6 in der Mitte, 10 Zahlen im ersten Umfang, 20 im zweiten. Die

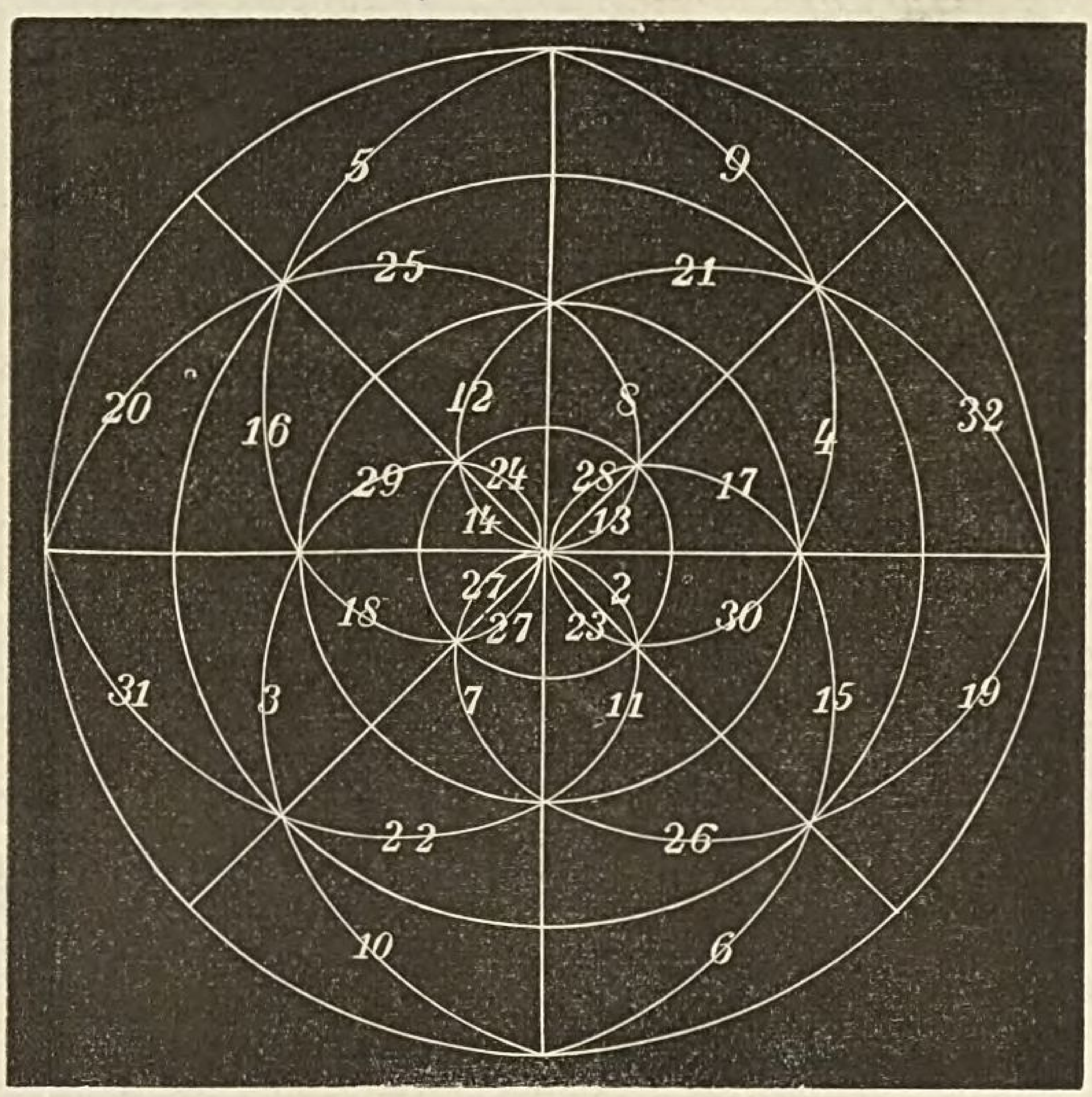
Fig. 73.



zweite Figur hat gerade Seitenzahl, ein inneres Fünfeck mit fünf Zahlen, ein äußeres mit 15; es enthält demnach die Zahlen

von 1 bis 20. Die dritte Form ist ein Sechseck mit 13 Zahlen, 12 im Umfange und die mittlere Zahl 7 in der Mitte.

Fig. 74.



Wie man eine bestimmte Summe durch Benutzung von Reihen erhält, deren aufeinanderfolgende Glieder stets dieselbe Differenz haben (in der natürlichen Zahlenreihe Eins), so kann man ein be-

Fig. 75.

1 26 3 6 10 24 27 10

7 4 6 18 20 9 11 21 2 1 5 6

2 5 3 22 15 16 17 8 5 8 7 9 2

4 7 12 13 23 11 3 4 12

1 19 14

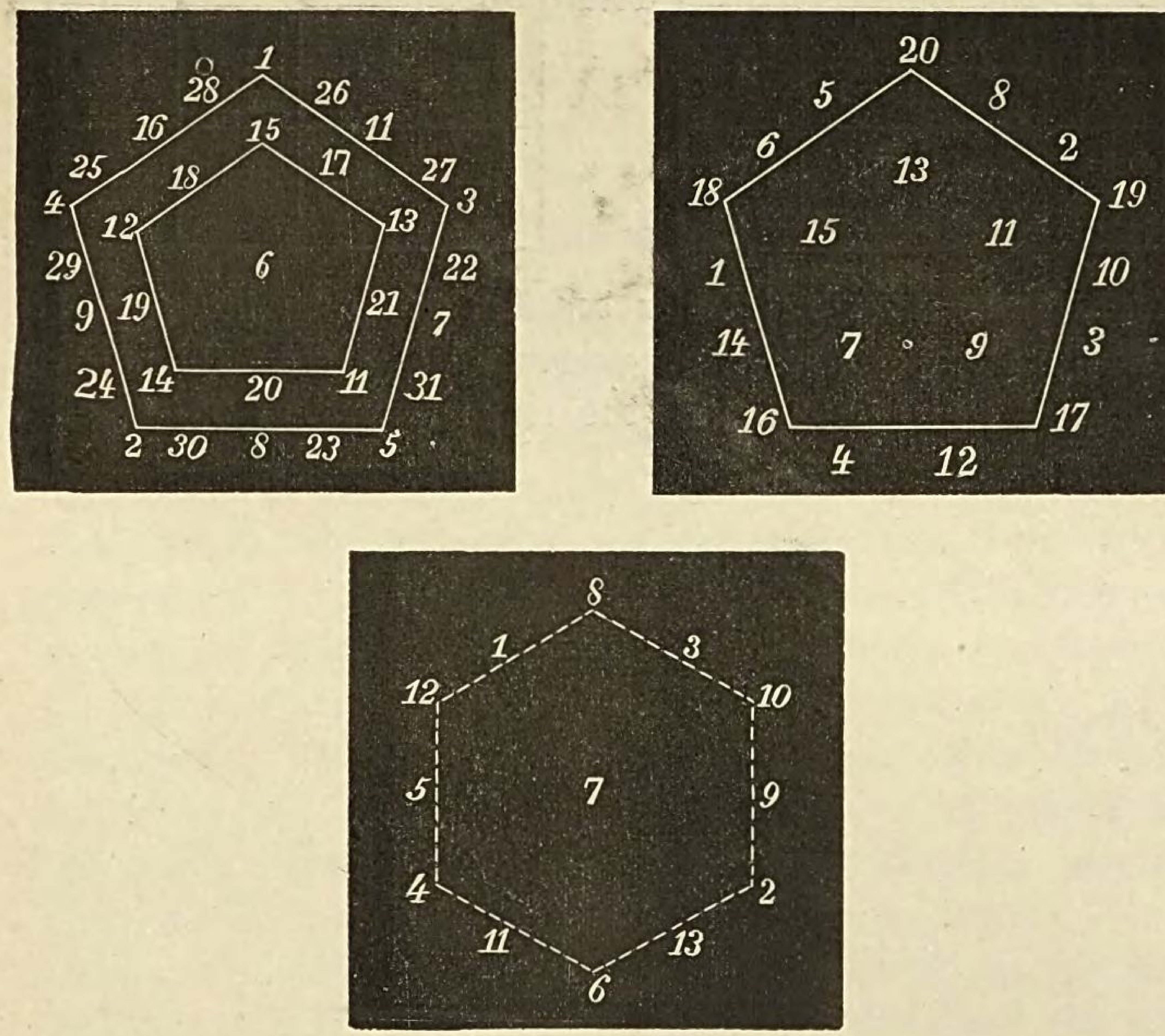
25

stimmtes Produkt erhalten durch Benutzung von Reihen, deren aufeinanderfolgende Glieder stets denselben Quotienten haben. Erstere Reihen heißen bekanntlich arithmetische, letztere heißen geometrische. Hier zwei Beispiele (Fig. 77) für ein magisches Quadrat mit 9 und 16 Zahlen, bei denen die Produkte der in einer horizontalen,

vertikalen oder diagonalen Reihe stehenden Zahlen stets denselben Wert ergeben.

In den rechts stehenden Formen sind die Zahlen als Potenzen der Basis 3 bez. 2 dargestellt. Die Exponenten bilden dann in

Fig. 76.



beiden Fällen ein magisches Quadrat mit konstanter Summe, im ersten Falle 12, im zweiten 2. Man kann demnach aus jedem Quadrat mit konstanter Summe ein solches mit konstantem Produkt

Fig. 77.

3	6561	27
729	81	9
243	1	2187

oder

3^1	3^8	3^3
3^6	3^4	3^2
3^5	3^0	3^7

(Zu Fig. 77.)

256	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	32
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	16
$\frac{1}{8}$	4	8	1
$\frac{1}{16}$	128	64	$\frac{1}{128}$

oder

2^8	2^{-5}	2^{-6}	2^5
2^1	2^{-2}	2^{-1}	2^4
2^{-3}	2^2	2^3	2^0
2^{-4}	2^7	2^6	2^{-7}

bilden, indem man die Zahlen desselben zu Exponenten einer beliebigen, aber für jede Form gleichen Basis macht. In unserem Falle war die Basis 3 bez. 2, das konstante Produkt 3^{12} bez. 2^2.

4.

Zeit und Kalender.

Der Engländer sagt: „time is money"; der Physiker würde sagen: Zeit ist Bewegung. Wie für den Kaufmann das Geld die Grundlage des Handels ist und jeder Zeitaugenblick eine Verschiebung des in der Welt vorhandenen Besitzes mit sich bringt, die auch ihn als Geschäftsmann mit in ihre Kreise zieht, so ist die Bewegung für den physikalisch denkenden Menschen das Ursprüngliche, ja auch das Wertbestimmende und das Verfließen der Zeit ist für ihn nur bemerkbar und meßbar durch Veränderungen, die gewisse Bewegungen für unsere Sinne verursacht haben. Nach Kant sind bekanntlich Zeit und Raum „transcendental", d. h. jenseits aller Erfahrung liegend: beide Begriffe sollen dem Menschen angeboren sein, sie sollen gewissermaßen das unabhängige Schema sein, in welches alle Erfahrungen, alles Geschehen wie in ein Hauptbuch eingetragen werden muß. Nach Helmholtz ist der Raum mit seinen drei Ausdehnungen doch ein Produkt der Erfahrung, und Riemann, Gauß, Lobatschefsky und Bolyai haben eine Geometrie ausgebildet, die auf das Parallelenaxiom des Euklides verzichtet und unseren Raum als speziellen Fall (Grenzfall) eines viel allgemeineren auffaßt. Ebenso ist für den Physiker der Begriff „Zeit" aus gewissen durch Bewegung hervorgerufenen Lageveränderungen von Körpern abstrahirt. Wir messen die Zeit mittelst der Uhren, die ihren regelmäßigen Gang der gleichmäßigen Bewegung von Körpern verdanken. Dabei wird dieser periodische Gang vermittelst eines Systems von Rädern auf Zeiger übertragen. Die jeder irdischen Bewegung hinderliche Reibung sucht man dadurch zu vermeiden, daß man die Räderaxen auf harten Steinen sich drehen läßt und die sämmtlichen

Teile ölt; den noch verbleibenden Rest von Reibung und Luftwiderstand überwindet man durch den Druck von elastischen Federn oder Gewichten. Diese müssen dann in gewissen Zeitabschnitten wieder gespannt bez. aufgezogen werden, wodurch ihnen neue „Energie der Lage“ zugeführt wird, die dann in „Energie der Bewegung“ behufs Ueberwindung der Widerstände in den Teilen des Chronometers umgesetzt wird. Die Nichtberücksichtigung dieses Umstandes ist es, die in physikalisch nicht durchgebildeten Köpfen immer wieder den Gedanken anregt, ein „Perpetuum mobile“ herstellen zu wollen, dessen Unmöglichkeit eben in dem berühmten Prinzip der „Erhaltung der Energie“ enthalten ist. Man erzählt von Kaiser Karl V., in dessen Reich die Sonne nicht unterging, daß er sich im Kloster St. Just in Spanien, wohin er sich nach Niederlegung der Regierung zurückgezogen hatte, vergeblich damit beschäftigt habe, zwei Uhren auf gleichen Gang zu bringen. Diese Aufgabe ist für die heutige Mechanik nicht so ganz schwer; wenigstens könnte für Jahre hinaus der Schlag völlig übereinstimmend gestaltet werden und die Chronometer der Schiffe und Sternwarten dürfen im Laufe eines Jahres nur Bruchteile einer Sekunde vorgehen oder zurückbleiben. Bekanntlich bestimmt der Kapitän die geographische Länge mit der Uhr und eine Zeitdifferenz von vier Minuten entspricht bereits einem Längenunterschiede von einem Grade oder fünzehn geogr. Meilen. Ein Fehler von vier Zeitsekunden würde immer noch im Raume einen Fehler von einer englischen Meile veranlassen, der an der Küste verhängnisvoll werden könnte. Geht eine Uhr auf $1/15$ Zeitsekunde genau, so ist der Fehler, der gemacht werden kann, etwa 30 Meter, eine Entfernung, die auf einer guten Seekarte gar wohl noch abzustecken ist.

Bekanntlich giebt es heute in Europa nur noch drei verschiedene Ortszeiten, die westeuropäische, die mitteleuropäische und die osteuropäische. Jede erstreckt sich über fünfzehn Grade, so daß an zwei benachbarten Orten der Grenze ein Zeitunterschied von einer Stunde vorhanden ist. Daß man sich noch nicht zu einer einheitlichen Weltzeit hat entschließen können, hat in der historischen Entwickelung seinen Grund. Denn lange bevor es Uhren gab, lag das Bedürfnis der Zeitbestimmung vor und diese konnte nur nach dem Stande der Sterne oder der Sonne geschehen. Wenn man gerade den Tag in

zweimal zwölf Stunden und jede Stunde wieder in sechzig Minuten u. s. f. teilte, so hatte das seinen Grund in dem Umstande, daß die Babylonier, jenes phantasievolle und sternkundige Volk an den Ufern des Euphrat, dessen Blütezeit vor Tausenden von Jahren war, ein Zahlensystem mit der Grundzahl Zwölf besaßen, die vor unserer Zehn allerdings den Vorzug besserer Teilbarkeit hat.[1]) Uebrigens sind die Zeitbestimmungen bei den Schriftstellern der Alten recht unvollkommen. Da heißt es: „Als der Markt schon besucht war, um die Zeit der zweiten Nachtwache, bei Sonnenuntergang, um Mittag" u. s. f. Ein Blick auf den Stand der Sonne genügte noch dem geschäftigen Römer zur Zeitbestimmung, wenn er vielleicht auch schon Gelegenheit hatte, an einer Wasser- oder Sanduhr, die beide nach dem Prinzip unserer sogenannten Eierkocher eingerichtet waren, genauere Kenntnis zu erhalten. Dem Schiffer aber, welcher in dunkler Nacht das mittelländische Meer durchkreuzte, diente die Stellung besonders heller Sterne als Wahrzeichen und Richtschnur. Die Kopernikanische Lehre hat den Beweis erbracht, daß die tägliche Bewegung der im Vergleich zur Sonne sehr weit entfernten Gestirne, die ja ebenfalls Sonnenwelten vorstellen, nur von der Axendrehung der Erde herrührt, daß dagegen die nicht so einfache Bewegung der Sonne, wie wir sie beobachten, ihren Grund nicht nur in der Axendrehung, sondern auch in der jährlichen Drehung der Erde um ihren Centralkörper, die Sonne, hat. Fände letztere nicht statt, so würde die Sonne ihre Stellung zu den übrigen Gestirnen nicht verändern, also nur entgegen der wirklichen Erdbewegung ihren Lauf von Osten nach Westen vollenden und immer gleichzeitig mit gewissen anderen Gestirnen den Meridian passiren. Da aber die Erde sich rechtläufig, d. h. wieder von Westen nach Osten auch um die Sonne dreht, so bleibt sie täglich um etwa einen Grad, also zwei Sonnenbreiten zurück und der Eintritt der Sonne in den Meridian findet daher vier Minuten später statt als der Eintritt derjenigen Gestirne, die beim letzten Durchgang noch gemeinsam mit ihr den höchsten Punkt erreicht hatten. Die Zeit zwischen zwei Sterndurchgängen ist der Sterntag, diejenige zwischen zwei Sonnendurchgängen der Sonnentag. Nun ist aber aus zwei später zu erörternden Gründen

---

[1]) Siehe Abschnitt 1, S. 4.

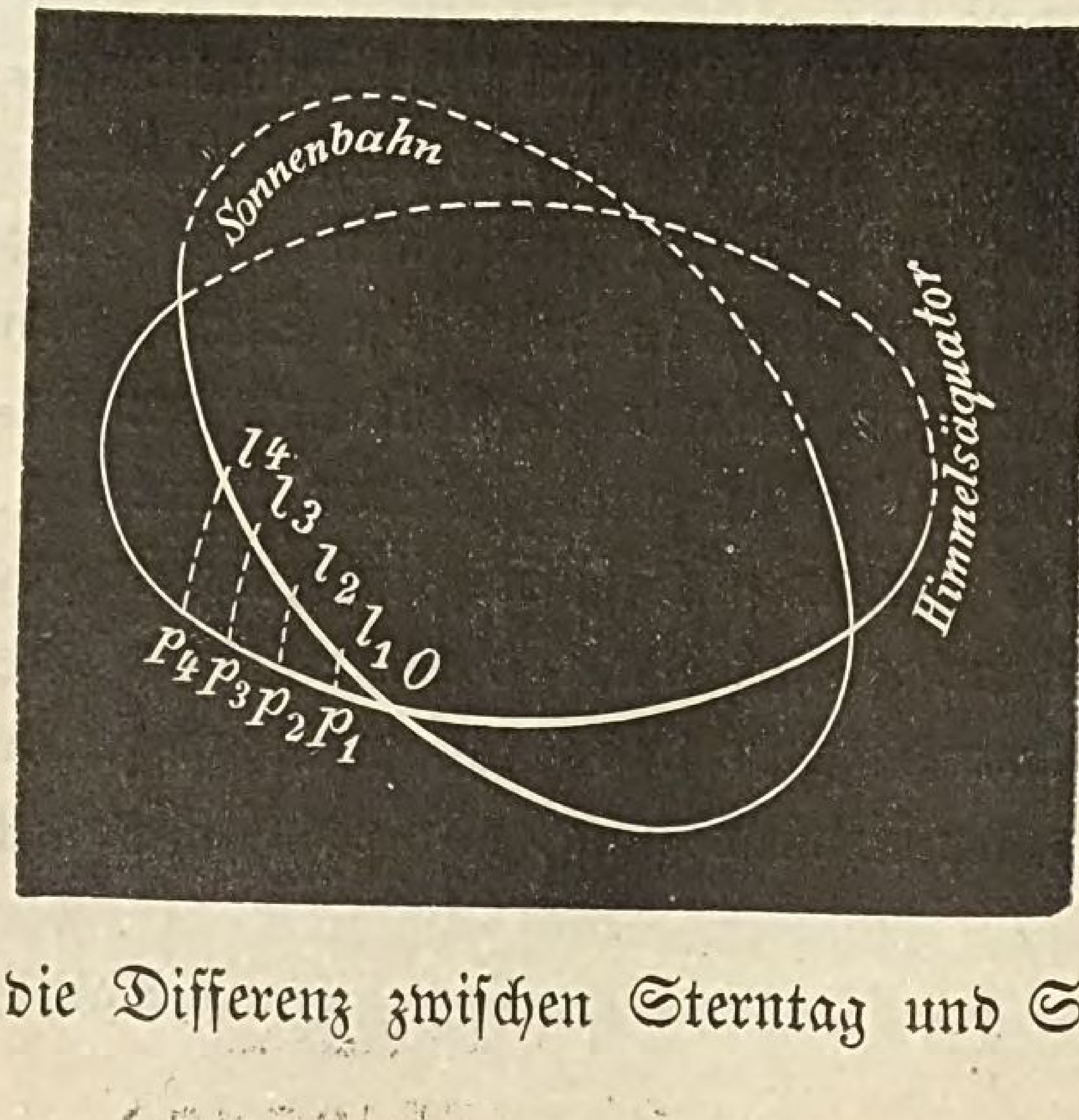
die Zeit zwischen zwei Sonnenkulminationen verschieden und es wäre daher rätlich, den Sterntag unserer bürgerlichen Rechnung zu Grunde zu legen; für uns würde das aber doch allerlei Ueberraschungen bringen. Jeder Tag, der eine unveränderliche Länge haben würde, da er ja nur von der stets gleichen Umdrehungszeit der Erde abhinge, wäre vier Minuten kürzer, als jetzt. Würde also die Uhr am Mittag des zwanzigsten März, wo der Mittelpunkt der Sonne sich mit dem sogenannten Frühlingspunkt des Himmels deckt, auf Sternzeit gerichtet und gestellt, so würde am folgenden Tage die Sonne um 12 Uhr noch nicht im Meridian, am 21. Juni würde sie mittags genau im Osten und am 21. Dezember genau im Westen stehen, während am 21. September das, was wir sonst 12 Uhr nachts nennen, 12 Uhr mittags genannt würde. Da wir doch unsere täglichen Gewohnheiten nach der Uhr einzurichten gewohnt sind, so würde demnach eine arge Verwirrung entstehen. Man muß daher den Sonnentag zu Grunde legen trotz seiner wechselnden Länge; dieser Mangel wird behoben durch die Vorstellung einer Sonne, die sich im Weltäquator mit gleichmäßiger Geschwindigkeit bewegt und nach Ablauf je eines halben Jahres in den gegenüberliegenden Schnittpunkten der Bahnen mit der wirklichen Sonne zusammentrifft. Der längste wahre Sonnentag ist 51 Sekunden länger, als der kürzeste, während die „gedachten“ alle gleich lang sind. Der so gewonnene Tag heißt der mittlere Sonnentag und die danach gestellten Uhren geben die mittlere Zeit (M. Z.), während die richtig konstruirte Sonnenuhr (eine ebenso gehende Taschen- oder Pendeluhr ließe sich nicht konstruiren, da sie periodisch ihren Gang ändern müßte) die wahre Sonnenzeit (W. S. Z.) giebt. Der Unterschied zwischen beiden Zeitangaben heißt die Zeitgleichung. Diejenige Zeit nun, nach der jetzt unsere Uhren gestellt sind, ist die mittlere Ortszeit des durch Görlitz gehenden Meridians, der die mitteleuropäische Zone annähernd halbirt. Der Unterschied einer Angabe der Sonnenuhr und einer anderen mechanischen, richtig gehenden Uhr setzt sich demnach aus zwei Teilen zusammen, aus der Zeitgleichung und der durch die Längendifferenz des Ortes gegen Görlitz bestimmten Abweichung. Beide können positiv und negativ sein. Die Zeitgleichung ist am zwölften Februar und am ersten November am größten, nämlich + 15 bez. — 17 Minuten

etwa, also M. Z. — W. S. Z. = $\begin{matrix} +15\,(^{12}/_{2}) \\ -17\,(^{1}/_{11}) \end{matrix}$. Die Differenz M. E. Z. — M. Z. ist für westliche Orte positiv, für östliche negativ. Dieser letztere Unterschied ist durch die geographische Länge nach jeder Karte auf Sekunden genau bestimmbar, der erstere dagegen durch folgende Ueberlegung. Die Kulmination der wahren Sonne fällt am 20. März (Frühlingsanfang) genau zusammen mit der der fingirten Sonne; mit jedem Tage verspätet sich aber ihre Kulmination um 3 Minuten und 55,91 Sekunden. In Wahrheit freilich bewegt sich die Erde um die Sonne auf einer Ellipse von mehr als 120 000 000 deutschen Meilen Umfang, so daß sie in jeder Sekunde in dieser Bahn etwa vier Meilen zurücklegt. Nur, weil uns diese Bewegung nicht zum Bewußtsein kommt, scheint sich die Sonne in entgegengesetzter Richtung zu bewegen. Im Winter ist die Erde der Sonne am nächsten und da ihre Bewegung ja wesentlich nur eine Folge der Anziehung durch die Sonne ist, so ist sie beschleunigt. Sie wird also in den Wintermonaten täglich einen größeren Bogen am Himmel zurücklegen, als im Sommer und zwar wird nach den Kepler'schen Gesetzen dieser Winkel in demselben Verhältnis größer sein, als die Entfernung von der Sonne kleiner ist und umgekehrt. Um sich ein klares Bild von der Zeitgleichung, d. h. dem Unterschiede zwischen Sterntag und Sonnentag zu machen, stelle man folgenden einfachen Versuch an.

Man setze im dunkeln Zimmer ein Licht in die Mitte des Tisches und nehme ein Henkelglas. Die Kerze stellt die Sonne dar, das Glas die Erde, der Henkel den Meridian des Beobachtungsortes. Wird der Henkel gerade von vorn durch das Licht beschienen, so ist am Beobachtungsort Mittag. Dreht man nun das Glas von Westen durch Süden um seine Axe, so wird ein Stern, den man sich an einem Punkte der Zimmerkante vorstellt und der anfangs mit dem Henkel und dem Licht in einer geraden Linie lag, stets nach Drehung des Glases wieder mit ihnen gleichzeitig in gerader Linie liegen. Der Sterntag hat dann dieselbe Länge wie der Sonnentag. Verschiebt man dagegen das Glas während seiner Axendrehung in der Richtung der Erdbewegung, also rechtläufig mit der Drehung der Erde, so fällt die Kante des Zimmers, also der Stern, früher mit der Ebene des Henkels zusammen, als das Licht

oder die Sonne, da man das Glas noch um einen Winkel weiter drehen muß, bis wieder das Licht genau von vorn auf den Henkel fällt. Da nun im Januar die Erdbewegung größer ist, so wird auch der zuletzt erwähnte Winkel, um den man noch drehen muß, größer sein, demnach auch der Unterschied zwischen Sonnentag und Sterntag, also die Zeitgleichung. Die zweite auf die Größe dieses Unterschiedes wirkende Ursache besteht in der schiefen Lage der Ebene der Erdbahn zum Himmelsäquator. Die Ebene der Erdbahn ist bestimmbar durch die verschiedenen Sonnenstellungen an einem Tage, etwa den Punkt des Auf- und Unterganges und den Kulminationspunkt. Der Himmelsäquator dagegen ist ein durch den Ost- und Westpunkt gehender Kreis, der sich im Südpunkt so hoch erhebt, daß etwa 80 sich berührende Sonnenscheiben dazwischen Platz finden. Alle Sterne bewegen sich infolge der Erdumdrehung in Kreisen, die dieser Ebene parallel sind, und die Zeit, welche sie dazu brauchen, ist eben der Sterntag. An dieser scheinbaren täglichen Umdrehung nimmt auch die Sonne teil; auch sie durchläuft daher täglich einen zum Himmelsäquator parallelen Kreis, aber täglich einen andern, so daß die zusammenhängende Kurve eine **Schraubenlinie** ist, die am Tage der Tag- und Nachtgleichen mit dem Himmelsäquator zusammenfällt, dagegen am 21. Juni den höchsten und am 21. Dezember den tiefsten Punkt dieser Raumkurve erreicht. Die Figur 78 möge diese Verhältnisse veranschaulichen. Wenn am 20. März die Sonne im Punkte O den Himmelsäquator schneidet, so wird sie eine Woche später etwa in l_1, wieder eine Woche darauf in l_2 u. s. f. sich befinden. Wir haben bereits oben erläutert, daß l_1, l_2, l_2, l_3 u. s. f. wegen der elliptischen Gestalt der Erdbahn nicht gleich sind und daß daher im Winter die Differenz zwischen Sterntag und Sonnentag größer ist, als im

Fig. 78.



Sommer. Aber selbst wenn sie gleich wären, so wären doch ihre Projektionen auf den Himmelsäquator p_1, p_2, p_2, p_3 u. s. f. nicht gleich, sondern im Frühjahr und Herbst, also in der Nähe der Schnittpunkte, offenbar kleiner, als im Sommer und Winter. Es ist dies der zweite Grund für eine Vergrößerung des Unterschiedes zwischen Sonnentag und Sterntag, da ja letzterer doch auf dem Himmelsäquator gemessen wird, ersterer dagegen auf einer Ebene, deren Neigung zum Aequator sich in jedem Augenblicke verändert. Der Winkel zwischen den beiden gezeichneten Ebenen heißt die Schiefe der Ekliptik und beträgt annähernd 23 1/2 Grad.

Um dieser beiden Gründe willen hat man eine Sonne fingirt, die im Aequator sich mit gleichbleibender Geschwindigkeit bewegt, sich also in gleichen Zeiten gleich weit vom Frühlingspunkt nach Osten entfernt. Der mittlere Sonnentag ist die Zeit zwischen zwei Durchgängen dieser fingirten Sonne durch den Meridian. Die danach gerichtete Uhr giebt mittlere Zeit (M. Z.) an und sämmtliche astronomische Uhren gehen danach. Sie geben einen um etwa vier Minuten verlängerten Sterntag an. Im Januar sind die wahren Sonnentage größer, als die mittleren; wollen wir daher wahre Sonnenzeit erhalten, so müssen wir die Zeitgleichung zuzählen. Um jetzt die Größe dieser Zeitgleichung zu erhalten, müssen wir eine kleine Abschweifung machen.

Offenbar gebraucht die Sonne von ihrem Aufgang bis zur höchsten Aufsteigung dieselbe Zeit, wie von dort ab bis zu ihrem Untergange. Die Sonnenuhr also, d. h. eine Uhr, welche wahre Sonnenzeit zeigt, giebt den Morgen gerade so groß an, wie den Nachmittag. Geht nun eine mechanische Uhr eine halbe Stunde zu früh, so erscheint der Vormittag eine Stunde kürzer als der Nachmittag und umgekehrt. Ebenso würden wir z. B. schließen, daß unsere Uhr eine Stunde zu spät geht, wenn uns dadurch, daß wir nach ihr uns richteten, der Vormittag zwei Stunden länger erschien, als der Nachmittag. Denken wir uns z. B., wir wachten am Morgen des 22. September, wo ja die Sonne um Sechs aufgeht, gerade zur Zeit des Sonnenaufgangs auf. Ohne uns der Thatsache zu erinnern, daß es ja nun sechs Uhr sein muß, blicken wir nach der Uhr. Diese möge durch Zufall, wieder ohne daß wir es wissen, eine halbe Stunde zurückgeblieben sein und demnach erst

auf $5^1/_2$ zeigen. Der Vormittag hat daher nach unserer Ansicht $6^1/_2$ Stunden, ebenso der Nachmittag. Da aber die Sonne thatsächlich um 6 Uhr untergeht, nach unserer Erwartung dagegen um $6^1/_2$, so werden wir anfangs höchst erstaunt sein, wenn nach unserer Uhr die Sonne bereits um $5^1/_2$ verschwindet, eine Stunde früher, als wir erwartet haben. Wir werden jedoch bei einiger Ueberlegung den Fehler finden und die Uhr richtig stellen. Die Tageslänge richtet sich eben nicht nach irgend einer Uhr, sondern einzig nach der Zeit, während welcher die Sonne wirklich über dem Horizonte weilt.

Die Zeitgleichung beträgt neun Minuten im Januar, um so viel geht also die M. Z. gegen W. S. Z. zu früh und es erscheint daher der Nachmittag um 18 Minuten länger, als der Vormittag. Unsere Uhren gehen aber nach der mittleren Einheitszeit, wie oben erläutert ist, und daher geht z. B. in Bremen die richtig gehende Uhr um 25 Minuten etwa vor, wodurch der Nachmittag wieder 50 Minuten zu lang erscheint. In Bremen erscheint daher um Mitte Januar der Nachmittag im Ganzen um eine Stunde und 8 Minuten zu lang. Dagegen würde um dieselbe Zeit an einem Orte, der etwa $2^1/_4$ Grad östlich von Görlitz liegt, z. B. Posen, der Nachmittag genau so lang erscheinen, wie der Vormittag, weil die Wirkung der Zeitgleichung durch den Umstand aufgehoben wird, daß die W. S. Z. gegen die Einheitszeit vorgeht infolge der östlichen Lage des Ortes. In unserer Breite bringt jede Verschiebung nach Osten um 16 Kilometer ($^1/_4$ Grad etwa) ein Zurückgehen bez. Vorgehen der Uhren um eine Minute mit sich. Aehnlich liegen die Verhältnisse in der westeuropäischen Zone, die Greenwich als Mittelpunkt hat und bei der osteuropäischen, die sich etwa von $22^1/_2$ bis $37^1/_2$ Grad östlich Greenwich erstreckt. Jede Zone beherrscht 15 Grad, hat also gegen die nächste eine Stunde Zeitdifferenz. Einige Abweichungen bringen allerdings die politischen Grenzen mit sich, weil sie nicht parallel mit den Meridianen verlaufen. So gehört Metz zur mitteleuropäischen Zone, dagegen Nancy auf derselben Länge ($16^1/_6°$ westlich) zur westeuropäischen.

Wir können nun die Zeitgleichung einigermaßen genau folgendermaßen bestimmen. Wir beobachten an dem betreffenden Tage die Differenz zwischen Vormittagslängen und Nachmittagslängen, nehmen

hiervon die Hälfte, subtrahiren oder addiren die durch die Lage bedingte Verschiebung gegen die mittlere Ortszeit, so haben wir die Zeitgleichung, d. h. den Unterschied gegen die wahre Sonnenzeit, also gegen die Angabe der Sonnenuhr. Im Kalender findet man den Sonnenaufgang und Sonnenuntergang meistens in mittlerer Einheitszeit, wodurch man jene Differenz direkt erhält.

Findet man an irgend einem Tage 6^h 59 Aufgang, 4^h 27 Untergang nach mittlerer Einheitszeit, so ist der Vormittag 34 Minuten länger; von der Hälfte 17 haben wir z. B. an einem Ort, welcher 5 Grad westlich gegen Görlitz liegt, 20 Minuten abzuziehen. Die Zeitgleichung beträgt also — 3 Minuten, d. h. wir müssen unsere Uhr um drei Minuten zurückstellen, damit sie nach wahrer Sonnenzeit geht. In größeren Kalendern findet man eine Tabelle für die Zeitgleichung, im Daheimkalender z. B. von zwei zu zwei Tagen berechnet.

Wir haben es im Vorhergehenden mit acht verschiedenen Zeiten zu thun gehabt, die wir nun zum Schluß noch einmal zusammenstellen wollen. Die Sternzeit und die astronomische Sonnenzeit sind an die Gleichung gebunden W. S. Z. — St. Z. = k Sek., wobei zu bedenken ist, daß die Differenz k ihren Wert täglich ändert, erstens wegen der ungleichförmigen Bewegung der Erde in ihrer Bahn, zweitens wegen der Schiefe der Ekliptik. Diese W. S. Z. und St. Z. haben nur astronomischen Wert. Die bürgerliche Zeit hat sechs Unterabteilungen: Wahre Sonnenzeit, mittlere Sonnenzeit, mittlere Ortszeit, west-, mittel- und osteuropäische Zeit. Den Zusammenhang zwischen den beiden ersten giebt die Zeitgleichung, welche ihre größten Werte im November und Februar erreicht; zwischen mittlerer Zeit und Ortszeit, ebenso zwischen den Einheitszeiten giebt die geographische Länge den Zusammenhang. Die erstere ist auf Greenwich bezogen, die Ortszeit auf die Länge des betreffenden Ortes, die Einheitszeiten in den verschiedenen Zonen auf 0°, 15°, 30° östlicher Länge von Greenwich. Die westeuropäische Zone hat also mittlere Sonnenzeit, weil sie so wie so auf den Meridian von Greenwich bezogen ist.

Wir wollen dies noch an Beispielen erläutern:

1. Wie viel zeigt eine Uhr in Leipzig am 25. Februar, wenn die Sonne gerade durch den Meridian geht? (W. S. Z. = 12 Uhr).

Die Zeitgleichung beträgt + 13 Minuten 19 Sekunden, die Differenz zwischen Ortszeit und mittlerer Zeit + 10 Minuten ($2\frac{1}{2}°$ westlich gegen den Meridian von Görlitz). Die Uhr ist also nach M. E. Z. = 12 Uhr 23 Minuten 19 Sekunden.

2. Am 8. Dezember geht die Sonne in Bremen nach M. E. Z. um 8 Uhr morgens auf. Wie viel würde eine Sonnenuhr an diesem Tage in Bremen bei Sonnenaufgang zeigen? Zunächst erhält man die Ortszeit durch die Subtraktion von 25 Minuten, dann muß man 7 Minuten 38 Sekunden zuzählen, da die Zeitgleichung, also O. Z. — W. S. Z. = — 7 Min. 3 Sek. beträgt. Es ist daher nach wahrer Sonnenzeit 7 Uhr 42 Min. 38 Sek.

3. Für Memel ist M. E. Z. — O. Z. = — 29 Minuten. Am 21. September ist die Zeitgleichung — 7 Minuten 10 Sekunden. Wie viel zeigen die Uhren dort an diesem Tage bei Sonnenuntergang? Derselbe findet nach W. S. Z. um 6 Uhr statt; dann ist die Ortszeit 5 Uhr 52 Min. 50 Sek., also die mitteleuropäische Zeit 5 Uhr 23 Min. 50 Sek.

Der immerwährende Kalender.

Die Aufeinanderfolge der Zeitmomente können wir nur durch Bewegungen messen; damit die Messung genau sei, muß die Bewegung gleichförmig und beständig sein. Eine solche findet sich nicht bei Körpern auf der Erde, sondern nur bei Himmelskörpern, welche gleichmäßig und ruhig mit einer Beständigkeit den Weltenraum durchwandern, die dem Menschen und seinen Gebilden versagt blieb. Der Zeitraum von einem Sonnenaufgang bis zum nächsten ist der Tag. Größere Zeiträume haben einige Völker, besonders orientalische, durch die Wiederkehr einer bestimmten Mondphase, andere durch diejenige einer bestimmten Sonnenstellung gemessen. Die Kombination dieser Bewegungen von Erde, Mond und Sonne hat dazu geführt, im Kalender gesetzmäßige Feststellungen zu treffen. Der seit Numa bis zu Julius Cäsar in Gebrauch gewesene „römische Kalender“ hatte gar keine genauen Regeln. Das Mondjahr von zwölf Mondrevolutionen bildete 355 Tage, das Sonnenjahr, welches die Jahreszeiten regelt, spielte durch willkürlich festgesetzte Schalttage hinein, um nicht mit der Zeit einen Monat in eine andere Jahres-

zeit verschoben zu sehen. Das letzte Jahr dieses Kalenders (46 v. Chr.) hatte 455 Tage und hieß daher das **Jahr der Verwirrung**. Mit Hilfe des Alexandrinischen Astronomen Sosigenes stellte Cäsar einen neuen Kalender nach festen Regeln auf. Das Jahr sollte von nun ab 365 Tage haben, alle vier Jahre wurde ein Schalttag, der 29. Februar, eingeschoben. Die Schaltjahre sollten die durch vier teilbaren Jahreszahlen sein. Die mittlere Dauer eines Jahres war darnach 365 1/4 Tag. Nun ist aber die Zeit zwischen zwei Tag- und Nachtgleichen nur 365,2 422 042 Tage (Tropisches Jahr). Das julianische Jahr war daher in **neun** Jahrhunderten etwa um 7 Tage zu groß. Man bemerkte infolge dessen im Jahre 1414, daß die Aequinoktien sich vom 21. März und 21. September immer mehr entfernten. Es kam daher, daß Tag und Nacht bereits im Anfange dieser Monate (am 11. März) gleich waren, statt, wie es hätte sein müssen, am 20. Dieser Umstand führte zur Reform des Kalenders durch Papst **Gregor** XIII., welche am 24. Februar 1582 bekannt gemacht wurde. Die Protestanten entschlossen sich sehr langsam zu seiner Einführuug und noch Leibniz war im 17. Jahrhundert bei protestantischen Fürsten dafür vorstellig. Heute haben nur noch Rußland und Griechenland den alten Kalender, der gegen den unsrigen um 12 Tage, von 1900 ab um 13 Tage, von 2100 ab um 14 Tage zurück ist. Infolge päpstlicher Verordnung bezeichnete man also den 5. Oktober als den 15., und um künftig der wahren Länge des Jahres näher zu kommen, sollten die auf zwei Nullen endigenden Jahreszahlen, die bisher Schaltjahre waren, in Zukunft keine mehr sein, mit Ausnahme derjenigen, bei denen auch die nach Abschneidung der Nullen übrigbleibenden Ziffern noch durch vier teilbar sind (1600, 2000, 2400). Um die Genauigkeit des neuen Kalenders kennen zu lernen, beachte man, daß es von 1 bis 10 000 2500 durch vier teilbare Ziffern giebt, ferner 100 Säkularjahre, von denen wieder 25 durch vier teilbar sind. Hundert Jahrhunderte haben demnach 2425 (2500 — 100 + 25) Schalttage, also 3 652 425 Tage, so daß die mittlere Dauer eines Jahres 365,2425 Tage beträgt, demnach um 0,0002958 Tage zu groß ist. Dies bringt erst auf mehr als 3000 Jahre einen Fehler von einem Tage, so daß erst in dem Schaltjahre 4600 etwa ein 29. Februar auszulassen sein würde.

Der „fortwährende Kalender" hat den Zweck, eine Methode an die Hand zu geben, um sofort für ein gegebenes Datum irgend eines vergangenen oder zukünftigen Jahres den Wochentag bestimmen zu können. Irgend ein Datum setzt sich aus vier gegebenen Größen zusammen:

1. der Tageszahl im Monat (T);
2. der Monatsnummer (M);
3. der Jahresnummer im Jahrhundert (J);
4. der Nummer des Jahrhunderts (N).

Betrachten wir zuerst die Zahlen T, so brauchen wir, von einem bestimmten Wochentage ausgehend, nur die Reste der Teilung durch 7 hinzuschreiben und beim Uebergange von einem Monat zum andern die Länge desselben zu beachten. Da der Schalttag der 29. Februar ist, so wollen wir den Januar und Februar eines Jahres auf das vorhergehende beziehen und mit März beginnen, damit die Einschaltung des Tages beim Uebergange von einem Jahr in das andere stattfindet. Demnach bilden wir:

					T				
1	8	15	22	29	1	März	3	September .	5
2	9	16	23	30	2	April	6	Oktober . .	0
3	10	17	24	31	3	Mai	1	November .	3
4	11	18	25	—	4	Juni	4	Dezember .	5
5	12	19	26	—	5	Juli	6	Januar* . .	1
6	13	20	27	—	6	August . . .	2	Februar* . .	4
7	14	21	28	—	0				

Für den März ist M = 3; beim Uebergange nach April muß diese Zahl um Drei vermehrt werden, da der März (28 + 3) Tage hat. Ein Donnerstag im April hat dasselbe Datum, wie der Montag im März; um also wieder auf gleiche Wochentage zu beziehen, ist Drei zum Datum hinzuzufügen. So erklären sich auch die übrigen Reste. Statt 8 kann man wieder den Rest 1 setzen, statt 7 die Null.[1]) Da ferner ein Jahr 52 Wochen und

[1]) Will man sich die Tabelle gedächtnismäßig aneignen, so merke man März — dritter Monat = 3, Oktober — 0 — Null, Januar — erster Monat — 1. Das giebt dann einen ganz guten Anhaltspunkt.

noch einen Tag, ein Schaltjahr ebensoviele Wochen und zwei Tage hat, so ergiebt sich für die Jahresreste nebenstehendes Schema.

				J
00	28	56	84	0
01	29	57	85	1
02	30	58	86	2
03	31	59	87	**3**
04	32	60	88	5
05	33	61	89	6
06	34	62	90	0
07	35	63	91	**1**
08	36	64	92	3
09	37	65	93	4
10	38	66	94	5
11	39	67	95	**6**
12	40	68	96	1
13	41	69	97	2
14	42	70	98	3
15	43	71	99	**4**
16	44	72	—	6
17	45	73	—	0
18	46	74	—	1
19	47	75	—	**2**
20	48	76	—	4
21	49	77	—	5
22	50	78	—	6
23	51	79	—	**0**
24	52	80	—	2
25	53	81	—	3
26	54	82	—	4
27	55	83	—	5

Ein Jahrhundert hat 5200 Wochen plus 100 Tagen und 25 Schalttagen. 125 Tage sind 18 Wochen vermindert um einen Tag, die Reste (S) der Jahrhunderte nehmen daher um 1 ab im Julianischen Kalender (J), dagegen im Gregorianischen (G) um 2 ab, wenn man von einem Jahrhundert zum nächsten übergeht. Nur, wenn man bei G von 1500 zu 1600 oder von 1900 zu 2000 übergeht, nimmt die Zahl auch nur um 1 ab, weil im Jahre 1600 und 2000 der Schalttag bleibt. Es ergiebt sich daher als letzte Resttabelle die folgende:

				J						G
0	7	14	21	5	15	19	23	27	—	1
1	8	15	22	4	16	20	24	28	—	0
2	9	16	23	3	17	21	25	29	—	5
3	10	17	24	2	18	22	26	30	—	3
4	11	18	25	1						
5	12	19	26	0						
6	13	20	27	6						

Für uns kommt ja hauptsächlich (seit 1582) der gregorianische Kalender in Betracht, für den man sich mnemotechnisch **1053** merken möge. Was die ersten Zahlen jeder Tabelle anbetrifft, so sind dieselben nach irgend einem bekannten Tage bestimmt worden. Das Jahr beginnt aus den oben angeführten Gründen immer am ersten März.

Jetzt benutze man folgende Regel: Man suche für ein bestimmtes Datum die vier Zahlen T, M, J und S auf, addire sie und suche den zu ihrem Reste (Teilung durch 7) gehörigen Wochentag. Man nehme dabei die Zahl J der letzten Tabelle, wenn es sich um eine Zahl der russischen oder griechischen Geschichte handelt oder wenn das Ereignis zwischen dem 1. Januar 45 v. Chr. Geb. und dem 5. Oktober 1582 geschehen ist; dagegen G nach dem 15. Oktober 1582. Nur in England ist der Gregorianische Kalender erst 1752 eingeführt worden.

So ist für den 26. Oktober 1896: T = 5
M = 0
J = 1
G = 3
9, Rest 2.

Der 26. Oktober 1896 ist also der zweite Wochentag, also ein Montag gewesen. Der 10. November 1483, der Geburtstag Luthers, war ebenfalls ein Montag, denn:

T = 3
M = 3
J = 5
J = 5
16, Rest 2.

Der deutsche Mathematiker Schurig hat eine etwas andere Regel angegeben. Er benutzt dazu fünf Zahlen. Die erste und zweite wird aus der oben angegebenen Tabelle für die Monate und Jahrhunderte entnommen, die dritte ist die Tageszahl, das Datum, die vierte ist der bei der Division durch 7 verbleibende Rest der Zehner und Einer der Jahreszahl, die fünfte der Quotient ihrer Teilung durch vier ohne Rücksicht auf den Rest. Z. B.: Auf welchen Tag fällt der tausendjährige Erinnerungstag der Geburt Bismarcks: der erste April 2815?

Datum	1
Monat	6
Jahrhundert . . .	0
Rest (15 : 7) . .	1
Quotient (15 : 4)	3
	11, Rest 4, also Mittwoch.

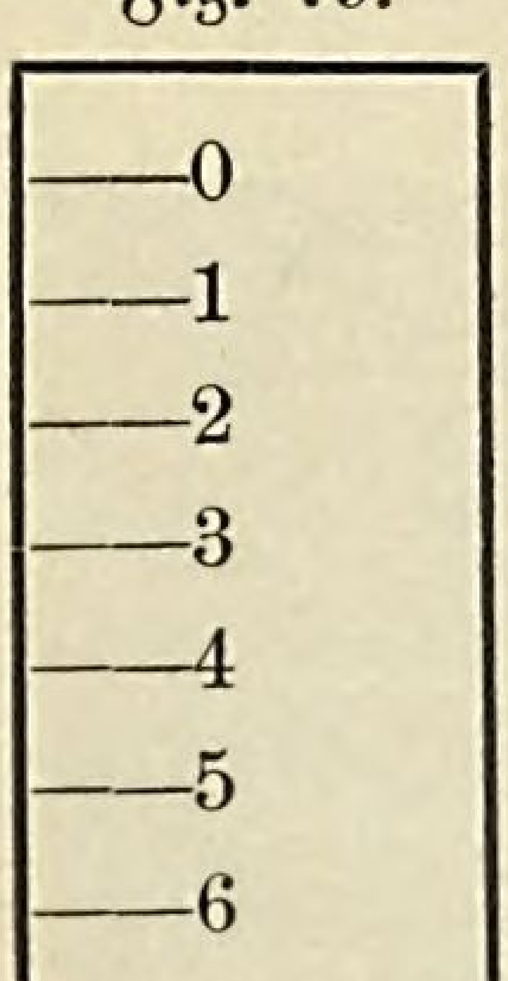
Ebenso: An welchem Wochentage wurde Schiller geboren? 10. November 1759.

Datum	10
Monat	3
Jahrhundert . .	5
Rest (59 : 7) .	3
Quotient 59 : 4)	14
	35, Rest 0: Sonnabend.

Vom mathematischen Gesichtspunkte aus ist diese Regel genau dieselbe, wie die obige. Denn die obige Tabelle T giebt denselben Rest, wie die ganze Division bei der Teilung durch 7. Die beiden letzten Zahlen aber geben als Rest den in der Tabelle für die Jahrhunderte angegebenen Wert, wenn man sie addirt. Die Schurig'sche Regel hat den Vorteil, daß man nur zwei Tabellen zu haben braucht.

Wir wollen kurz beschreiben, wie man sich einen einfachen ewigen Kalender herstellen kann, der für alle Kalender der Welt und alle Jahre paßt. Wir haben schon gesehen, daß die Kalenderrechnung zusammenhängt mit der Theorie der Reste bei der Teilung durch sieben und wir wollen daher zuvor auch dasselbe Verfahren für diese Resttheorie beschreiben, welches uns in den Stand setzen wird, für eine beliebig große Zahl den Rest der Teilung durch sieben anzugeben. Es bedarf wohl kaum der Bemerkung, daß man sich dieselben Täfelchen auch anfertigen kann für einen beliebigen anderen Teiler und für ein Zahlensystem mit irgend einer anderen Grundzahl, als Zehn. Auf einen Streifen in Form der Fig. 79 schreibe man in gleichen Abständen die Zahlen von 0 bis 6, d. h. die sämmtlichen möglichen Reste bei der Teilung durch den von uns zu behandelnden Divisor. Aehnliche Täfelchen richte man nun für die Einheiten ein, wobei 0 und 7, 1 und 8, 2 und 9 auf dasselbe Täfelchen kommen. Der Verlauf der Linien auf diesen Täfelchen ist bedingt durch den Rest, den diese Einer lassen; so hält 0 und 7 seine Richtung, da die Teilung aufgeht, 1 und 8 gehen um eine Einheit hinauf oder um sechs herunter, wenn das Ende

Fig. 79.



erreicht ist, da sie bei der Teilung den Rest 1 lassen. Betrachten wir nun ebenso die Zehner, so lassen

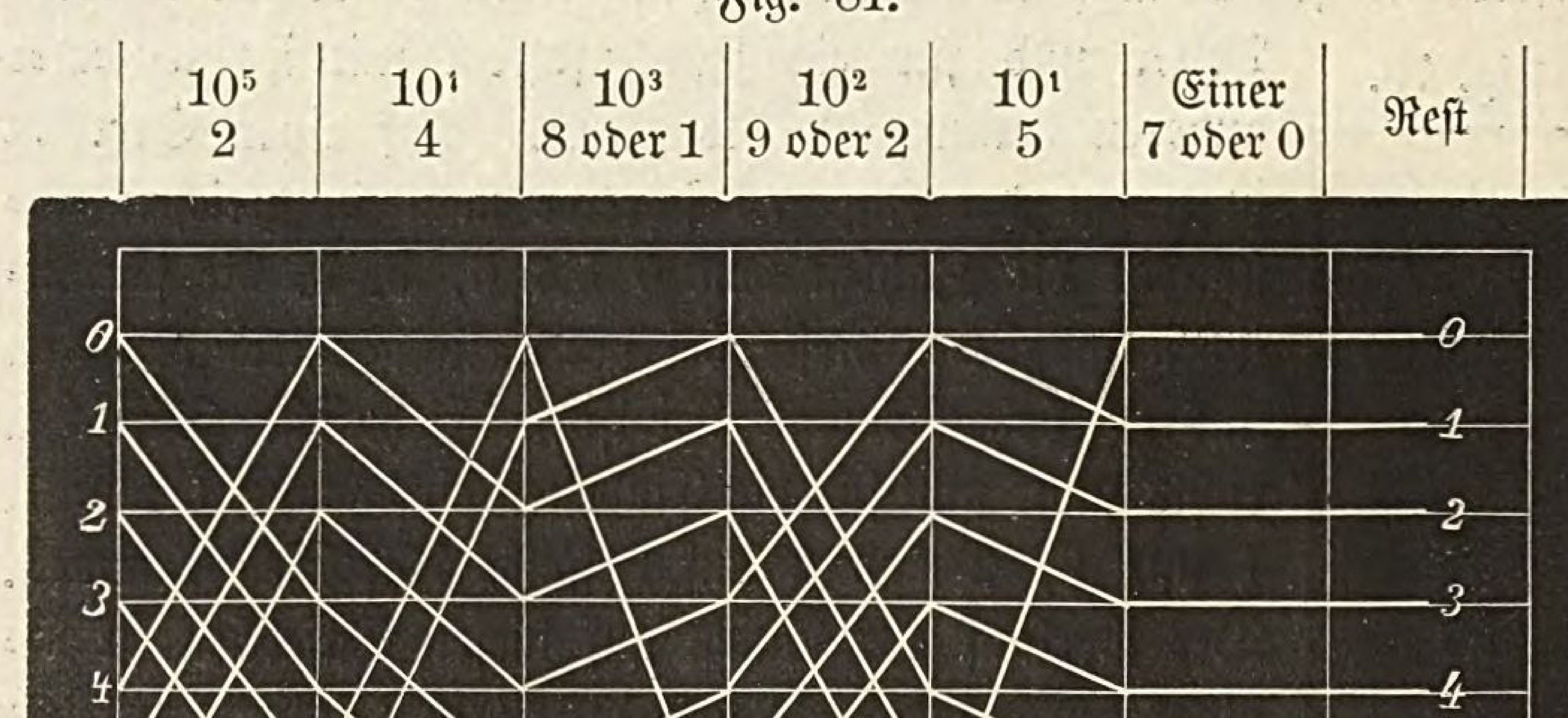
00 und 70 den Rest 0
10 und 80 den Rest 3
20 und 90 den Rest 6
30, 40, 50, 60 je die Reste 2, 5, 1, 4.

Die für die Zehner anzufertigenden Täfelchen werden also eine Linienführung haben, wie die Einer, und zwar den Resten 0, 3, 6, 2, 5, 1, 4 der Reihe nach. Für die Hunderte würde die Reihenfolge sein 0, 2, 4, 6, 1, 3, 5, für die Tausende 0, 6, 5, 4, 3, 2, 1, für die Zehntausende 0, 4, 1, 5, 2, 6, 3, für die Hunderttausende 0, 5, 3, 1, 6, 4, 2, für die Millionen wieder wie für die Einer u. s. f. im Zyklus (Fig. 80). Will man nun für irgend eine Zahl den Rest der Teilung haben, so legt man die ihren Ziffern entsprechenden Täfelchen aneinander und verfolgt in der obersten Reihe die auf denselben gezogenen Linien von links nach rechts. Der Endpunkt giebt den verbleibenden Rest an. In der Fig. 81 ist diese Zusammenstellung für die Zahl 248 957 ausgeführt. Man findet, wenn man links bei der Null beginnt, rechts den Rest Zwei. Man kann auch jede Gruppe, die

Fig. 80.



Fig. 81.



Einer, Zehner u. s. f. zusammen ausschneiden, auf eine drehbare Walze kleben und diese so nebeneinander befestigen, daß man von jeder Gruppe eine Reihe in einem Ausschnitt sehen kann. Dann stellt man die beweglichen Reihen entsprechend den Ziffern der Zahl, um die es sich handelt, in den Ausschnitt ein. Genau ebenso kann man nun verfahren, um für irgend ein Datum irgend eines Jahres den Wochentag zu finden. An die Stelle der Tabelle rechts mit den Resten treten die Wochentage, mit Sonntag (an Stelle der Null) beginnend. Am andern linken Ende befindet sich eine Tabelle mit den Daten der Monate. Dazwischen kommen nun noch drei Täfelchen, das erste für den Monat, das zweite für das Jahrhundert, das dritte für das tausendste Jahr des Jahrhunderts. Für die Monate und die Jahre hat man, entsprechend dem Teiler 7, sieben Täfelchen nötig, für die Jahrhunderte im Julianischen Kalender ebenso viele, dagegen nur vier für den Gregorianischen Kalender. (Man findet diese Täfelchen auf der beigefügten Tafel.)

Der Rest 0 entspricht dem Monat Oktober und ebenfalls dem 16.—20. und 24.—28. Jahrhundert des Gregorianischen Kalenders, auch dem 5.—12. und 19.—26. Jahrhundert des Julianischen, sowie den betreffenden Zahlen der obigen Tabelle.[1]) Das Täfelchen dieser vier Gruppen wird daher sieben wagerechte Striche erhalten. Der Januar und der Mai dagegen den Rest 1, ebenso die Jahrhunderte 15—19 und 23—27 im Gregorianischen und 4—11 und 18—25 im Julianischen Kalender; auch einer Reihe von Jahren würde dasselbe Täfelchen entsprechen, bei dem also der Strich von links nach rechts um eine Nummer fallen müßte, da ja an Stelle des Montags z. B. der Dienstag eintreffen würde. Aehnlich ist es bei anderen Gruppen. Der Leser findet am Schlusse des Buches sämmtliche Täfelchen, die zur Lösung der Aufgabe erforderlich sind. Man kann diese Täfelchen etwa zerschneiden und durch kleine dünne Bändchen wieder passend miteinander vereinigen, so daß man im Stande ist, jede Gruppe so zusammenzulegen, daß die übrigen sechs Täfelchen, welche nicht gebraucht werden, unter demjenigen

[1]) Das Jahrhundert ist meist durch die Ordnungszahl bezeichnet; unser Jahrhundert ist hier das 18—. Jahrhundert genannt, gemäß den ersten beiden Ziffern der Jahreszahl.

liegen, welches man benutzen will. Dies hat jedenfalls den Vorzug vor einer jedesmaligen Auswahl aus jeder Gruppe. Jedoch gelingt es auch nach einiger Uebung, das Resultat schnell zu ermitteln, ohne eine Zerlegung vorzunehmen, indem man in Gedanken die nicht in Frage kommenden Täfelchen überschlägt.

Fig. 82.

23. 19. 15.	E	D	C	B	A	G	F
22. 18.	G	F	E	D	C	B	A
21. 17.	B	A	G	F	E	D	C
20. 16.	D	C	B	A	G	F	E
	—	—	00	01	02	03	—
	04	05	06	07	—	08	09
	10	11	—	12	13	14	15
	—	16	17	18	19	—	20
	21	22	23	—	24	25	26
	27	—	28	29	30	31	—
	32	33	34	35	—	36	37
	38	39	—	40	41	42	43
	—	44	45	46	47	—	48
	49	50	51	—	52	53	54
	55	—	56	57	58	59	—
	60	61	62	63	—	64	65
	66	67	—	68	69	70	71
	—	72	73	74	75	—	76
	77	78	79	—	80	81	82
	83	—	84	85	86	87	—
	88	89	90	91	—	92	93
	94	95	—	96	97	98	98

(Zu Fig. 82.)

	Sonntage:						
	1	2	3	4	5	6	7
	8	9	10	11	12	13	14
	15	16	17	18	19	20	21
	22	23	24	25	26	27	28
	29	30	31	—	—	—	—
Januar Oktober	A	B	C	D	E	F	G
April Juli	G	A	B	C	D	E	F
September Dezember	F	G	A	B	C	D	E
Juni	E	F	G	A	B	C	D
Februar November März	D	E	F	G	A	B	C
August	C	D	E	F	G	A	B
Mai	B	C	D	E	F	G	A

Bei dem in Fig. 82 dargestellten ewigen Kalender ist der Sonntagsbuchstabe zu Grunde gelegt. Es finden sich in der ersten Tabelle die Jahre. Man suche über der betreffenden Jahreszahl den zu dem Jahrhundert (für das laufende Jahr ist diejenige Reihe zu nehmen, vor welcher die Zahl 18 steht) gehörigen Buchstaben. Diesen suche man auch in der zweiten Tabelle neben dem Monat, um den es sich handelt, wieder auf, so geben die vier oder fünf darüber stehenden Zahlen die Daten der Sonntage dieses Monats. Man findet also mit Hilfe dieser beiden Tabellen die Sonntage nebst den zugehörigen Daten und kann von dem nächst gelegenen Datum leicht bis zum verlangten weiterrechnen. Für den Julianischen Kalender müßten die Zahlen der ersten Tabelle anders geordnet werden.

Wir wollen diesen Abschnitt nicht beschließen, ohne auch die Methoden anzugeben, nach denen die Vorausberechnung des Osterfestes und der Neu- und Vollmondstage erfolgt. Das Osterfest

soll der kirchlichen Vorschrift entsprechend auf den ersten Sonntag nach eingetretenem Frühlingsvollmond stattfinden. Gauß hat für die Berechnung folgende Vorschrift gegeben. Bezeichnet man die Jahreszahl mit n und bildet nun $\frac{n}{19}, \frac{n}{4}, \frac{n}{5}$, bezeichnet die Reste dieser Divisionen bez. mit a, b, c und bildet dann $\frac{19a + 23}{30}, \frac{2b + 4c + 6d + 4}{7}$, so fällt der erste Ostertag auf den $(22 + d + e)$ten März, wenn d und e die Reste der beiden letzten Divisionen bezeichnen. Für 1898 ist $a = 17$, $b = 2$, $c = 1$; ferner giebt $\frac{323 + 23}{30}$ den Rest 16, und $\frac{4 + 4 + 96 + 4}{7}$ den Rest 3. Es ist daher Ostern 1898 am $(22 + 16 + 3)$ten März, d. h. am 10. April. Früher als am 23. März und später als am 25. April kann Ostern niemals fallen. Hier ist eine kleine Tabelle für die Lage des Ostersonntags bis 1925.

1899 . . .	2. April	1908 . . .	19. April	1917 . . .	8. April
1900 . . .	15. April	1909 . . .	11. April	1918 . . .	31. März
1901 . . .	7. April	1910 . . .	27. März	1919 . . .	20. April
1902 . . .	30. März	1911 . . .	16. April	1920 . . .	4. April
1903 . . .	12. April	1912 . . .	7. April	1921 . . .	27. März
1904 . . .	3. April	1913 . . .	**23. März**	1922 . . .	16. April
1905 . . .	**23. April**	1914 . . .	12. April	1923 . . .	1. April
1906 . . .	15. April	1915 . . .	4. April	1924 . . .	20. April
1907 . . .	31. März	1916 . . .	**23. April**	1925 . . .	12. April

Augenblicklich ist eine starke Bewegung, deren Leiter der Direktor Förster von der Berliner Sternwarte ist, vorhanden, um das Osterfest für alle christlichen Völker festzulegen. Man hofft, daß der Papst den Anstoß dazu geben würde und findet eine gewisse Stütze in den Schriften von Augustinus, der sich für Festlegung dieses Festes ausgesprochen hat. Der vorhin gebildete Rest der Division n : 19 ist auch für die Berechnung des Voll- und Neumonds wichtig. Man nennt ihn die „goldene Zahl". Geht die Division auf, so ist der Rest = 19 zu setzen. Man multiplizire die goldene Zahl mit 11, so erhält man, falls das Produkt kleiner als 30 ist, die „Epakte". Ist es größer als 30, so dividirt man zuvor durch 30; der Rest dieser Division ist dann die „Epakte". Die Epakte im Gregorianischen Kalender ist um 12, bez. im nächsten Jahr-

hundert um 13 kleiner. Zur Epaktenzahl addirt man die Zahl des fraglichen Monats, wobei die Zählung wieder beim März beginnt. Ist nun die erhaltene Summe größer als 30, so ist der Ueberschuß das Datum des Neumonds; ist sie dagegen kleiner, so ist der Unterschied gegen 30 das Datum des Neumonds. Im Mai 1897 ist Neumond am ersten des Monats: die güldene Zahl ist 16, das Produkt 16 × 11 = 176; der Rest der Division 26 ist die Epakte. Zur Epakte ist 3 zu addiren, da nach der vorgeschriebenen Zählung der Mai dritter Monat ist und die Differenz gegen 30 ist dann Eins, so daß Neumond am esten Mai ist. Der Vollmond fällt auf den 15ten Tag nach eingetretenem Neumond. Da der Mond täglich etwa eine Stunde später aufgeht (in sieben Tagen etwa sechs Stunden), so ist, wenn der Vollmond z. B. 8 Uhr abends stattfand, das letzte Viertel eine Woche später etwa 2 Uhr morgens, Neumond 14 Tage später etwa 8 Uhr morgens, erstes Viertel 3 Wochen später 2 Uhr nachmittags. Bekanntlich sind Ebbe und Flut eine Folge der Mondanziehung und die Flutwelle befindet sich daher stets unter dem Monde: daher tritt die Flut täglich fast eine Stunde später in Wirksamkeit.

5.

Zahlen-Systeme.

Wir haben in dem ersten Abschnitt sowohl unser Zahlensystem mit der Grundzahl „Zehn", als auch das bedeutend ältere, dem Orient entstammende mit der Grundzahl „Zwölf" erläutert. Dort ist auch bereits gezeigt worden, wie man Rechnungen in anderen Systemen ausführen muß und wie man Zahlen eines Systems in ein anderes umrechnen kann. Durch den Reisenden K. v. d. Steinen wissen wir, daß in den Urwäldern Brasiliens Völkerstämme leben, die nur bis zur „Drei" zählten, bei denen also bei der Vier bereits eine höhere Ordnung begann. Würden sie sich unserer Schreibweise bedienen, so besäßen sie die Ziffern 0, 1, 2, 3 und würden die Vier bereits durch die Form 10 darstellen, Acht durch 20, 12 durch 30, 16 durch 100, 64 durch 1000, 256 durch 10 000. Die Zahl 30213 würde in unser System so übertragen werden müssen: $3 \times 4^4 = 768$, $2 \times 4^2 = 32$, $1 \times 4 = 4$, und 3, in Summe 807.

Besondere Aufmerksamkeit verdient das binäre System, welches nur die Zeichen für Null und Eins haben würde und dessen Grundzahl bereits die Zwei wäre. Die 1 bedeutet an vorletzter Stelle 2, an dritter 4, an vierter 8, an fünfter 16, dann 32, 64, 128, 256, 512, und an elfter Stelle 1024. Unsere Zahl 1000 würde demnach zu schreiben sein $1 \times 512 + 1 \times 256 + 1 \times 128 + 1 \times 64 + 1 \times 32 + 0 \times 16 + 1 \times 8 + 0 \times 4 + 0 \times 2 + 0 \times 1 = 1111101000$. Die vorkommende Ziffer Eins bedeutet stets eine Potenz von Zwei. Jede der benutzten Vielfachen von Zwei kommt entweder gar nicht oder einmal vor. Es lassen sich demnach aus den aufeinanderfolgenden Potenzen von Zwei sämmtliche Zahlen bilden. Für eine Waage würde man beispielsweise sich einen Gewichtssatz wählen können, der 1, 2, 4, 8, 16,

32 und so fort Gewichtseinheiten enthielte; jedes beliebige Gewicht würde sich damit äquilibriren lassen. Mit den ersten elf Gewichten dieser Art in Grammen würden sich sämmtliche Körper von 1 bis zu mehr als 2000 g wiegen lassen. Mit 14 Gewichten würden wir Wägungen von 1 Gramm bis zu 16 kg vornehmen können. Die gebräuchlichen Gewichtssätze sind nach dem Dezimalsystem eingerichtet; man findet darin 1 g, 2 g, 2 g, 5 g, 10 g, 20 g, 20 g, 50 g, 100 g, 200 g, 200 g, 500 g, 1 kg, 2 kg, 2 kg, 5 kg, 10 kg. Für dieselben Grenzen, wie wir sie vorhin annahmen, würden hier 17 Gewichte erforderlich sein. Noch günstiger würde der Gewichtssatz ausfallen, wenn wir die Möglichkeit zulassen wollten, mit der man ja auch in der Praxis rechnet, durch Auflegen von Gewichten auf der anderen Schale, wo die zu wiegende Last liegt, den Ausgleich herbeizuführen. Dieses Auflegen würde auf der ersten Schale, auf der sich die Gewichte befinden, ein Fortnehmen, eine Subtraktion bedeuten. Verschafft man sich z. B. die Gewichtsstücke 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729 und so fort, so ist man im Stande, alle Gewichte bis zum Dreifachen des letzten Gewichts darzustellen und zwar würde sich jede Zahl auch nur wieder auf eine einzige Weise bilden lassen, die Zahl 7 z. B. durch Auflegen von 1 und 9 auf der einen und 3 auf der andern Schale. Wenn wir diese Zahl in der üblichen Weise schreiben wollen, so müssen wir das Abziehen in irgend einer Weise, z. B. durch einen über die Eins gesetzten Strich, zum Ausdruck bringen. Sieben würde demnach $1\bar{1}1$ geschrieben werden. Hier folgt der Anfang der natürlichen Zahlenreihe:

1	$1\bar{1}$	10	11	$1\bar{1}\bar{1}$	$1\bar{1}0$	$1\bar{1}1$	$10\bar{1}$	100	101	$11\bar{1}$	110	. .
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	. .

$$10\bar{1}\bar{1}001 = 1 \times 3^6 - 1 \times 3^4 - 1 \times 3^3 - 1 = 729 - 81 - 27 + 1 = 622.$$

Mit den neun Gewichten 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, 6561 in Grammen würde man alle Lasten zwischen 1 g und mehr als 19 kg abwiegen können. Wir kommen also hier mit neun Gewichten weiter, als im binären System mit 14 Gewichten und fast ebensoweit, als nach unserer gebräuchlichen Methode mit 17 Gewichten. Ein günstigerer Fall, als der zuletzt besprochene, ist thatsächlich nicht denkbar, wie sich mathematisch beweisen läßt.

Der Umstand, daß jede Zahl sich immer nur auf eine Art aus der Reihe der steigenden Grundzahlen bilden läßt, giebt zu folgendem niedlichen Gesellschaftsspiel Veranlassung. Man schreibe auf fünf Streifen Papier folgende Zahlen untereinander:

1	2	4	8	16
3	3	5	9	17
5	6	6	10	18
7	7	7	11	19
9	10	12	12	20
11	11	13	13	21
13	14	14	14	22
15	15	15	15	23
17	18	20	24	24
19	19	21	25	25
21	22	22	26	26
23	23	23	27	27
25	26	28	28	28
27	27	29	29	29
29	30	30	30	30
31	31	31	31	31

Obenan stehen die ersten Potenzen der Grundzahl 2, darunter alle diejenigen Zahlen der Zahlenreihe von 1 bis 31, zu deren Bildung jene Grundzahlen erforderlich sind. Sucht man irgend eine Zahl innerhalb der gegebenen Grenzen auf den Zetteln, so ist sie gleich der Summe der darüber befindlichen Grundzahlen und dadnrch eindeutig bestimmt. Man wird Jemanden, der den Zusammenhang nicht kennt, sehr überraschen können, wenn man mit Hilfe der Streifen eine beliebige Zahl (von 1 bis 31), die derselbe sich denkt, dadurch ermittelt, daß man diejenigen Streifen zurückerhält, auf denen die betreffende Zahl sich nicht befindet. Denkt sich z. B. Jemand die Zahl 25, so wird er die Streifen, bei denen 2 und 4 obenan stehen, zurückgeben; die Summe ist 6 und folglich die gedachte Zahl $= 31 - 6 = 25$. Die höchste vorkommende Zahl 31 ist gleich $1 + 2 + 4 + 8 + 16$; überhaupt ist die Summe einer Reihe aufeinanderfolgender Grundzahlen gleich der um Eins

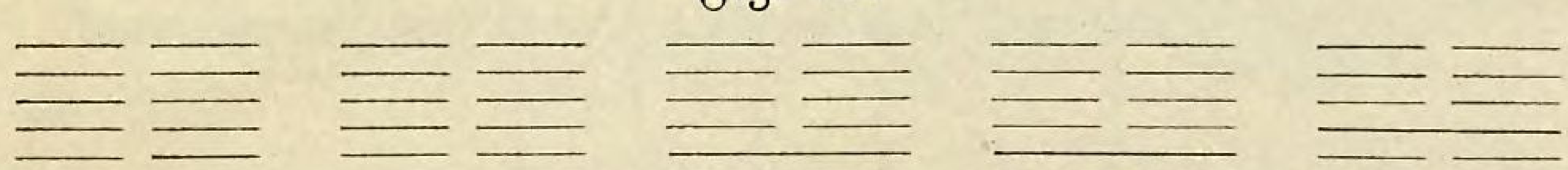
verminderten nächst höheren Grundzahl. Diese Thatsache hängt zusammen mit der bereits im ersten Abschnitt erörterten Formel: $a^n - 1 : a - 1 = 1 + a + a^2 + \ldots a^{n-1}$, wenn man $a = 2$ setzt.

An das binäre Zahlensystem knüpft sich noch eine interessante Anekdote. Es ist uns ein chinesisches Werk Jekim überliefert, welches dem ältesten Gesetzgeber dieses Landes Fohi zugeschrieben wird, der 3000 Jahre v. Chr. Geb. lebte. Das Buch enthält 64 verschiedene Symbole, deren jedes aus sechs übereinander liegenden wagerechten Linien besteht. Die Linien sind entweder ungeteilt oder geteilt, z. B.:



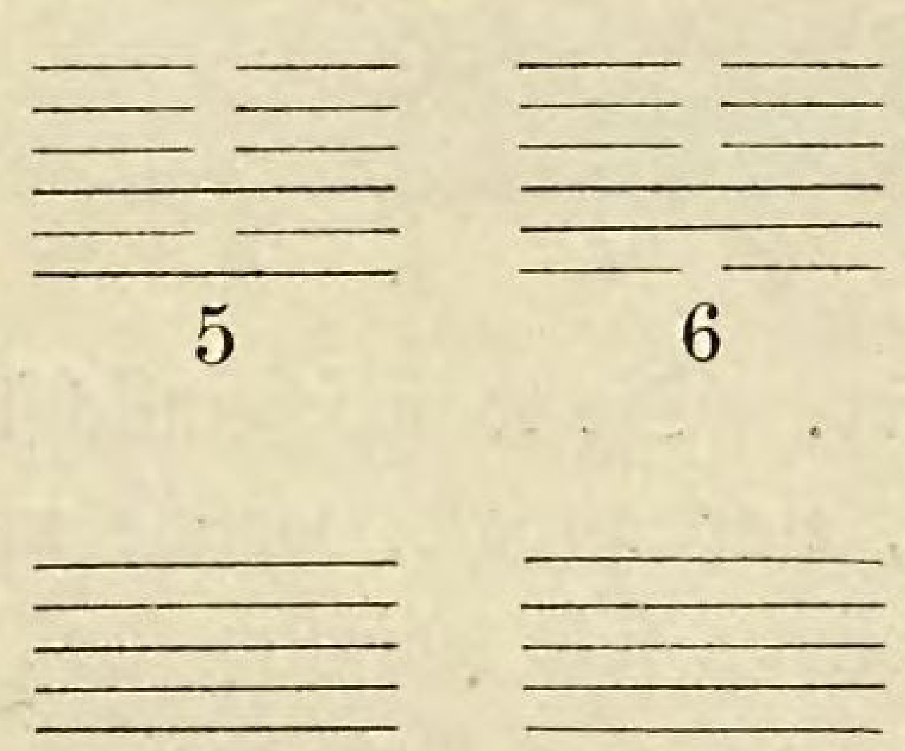
Vergebens hatten sich die Gelehrten an der Deutung versucht, als der berühmte Philosoph Leibniz folgende Auslegung gab. Die 64 Symbole stellen die ersten 64 Zahlen des binären Systems von 0 bis 63 dar. Die Null ist stets durch den zerschnittenen Strich, die Eins durch den ungeteilten dargestellt und die Ziffern sind statt von rechts nach links, wie bei uns, von unten nach oben geordnet. Sie beginnen also:

Fig. 83.



0 1 2 3 4 5 6

und die letzten sind:



62 63

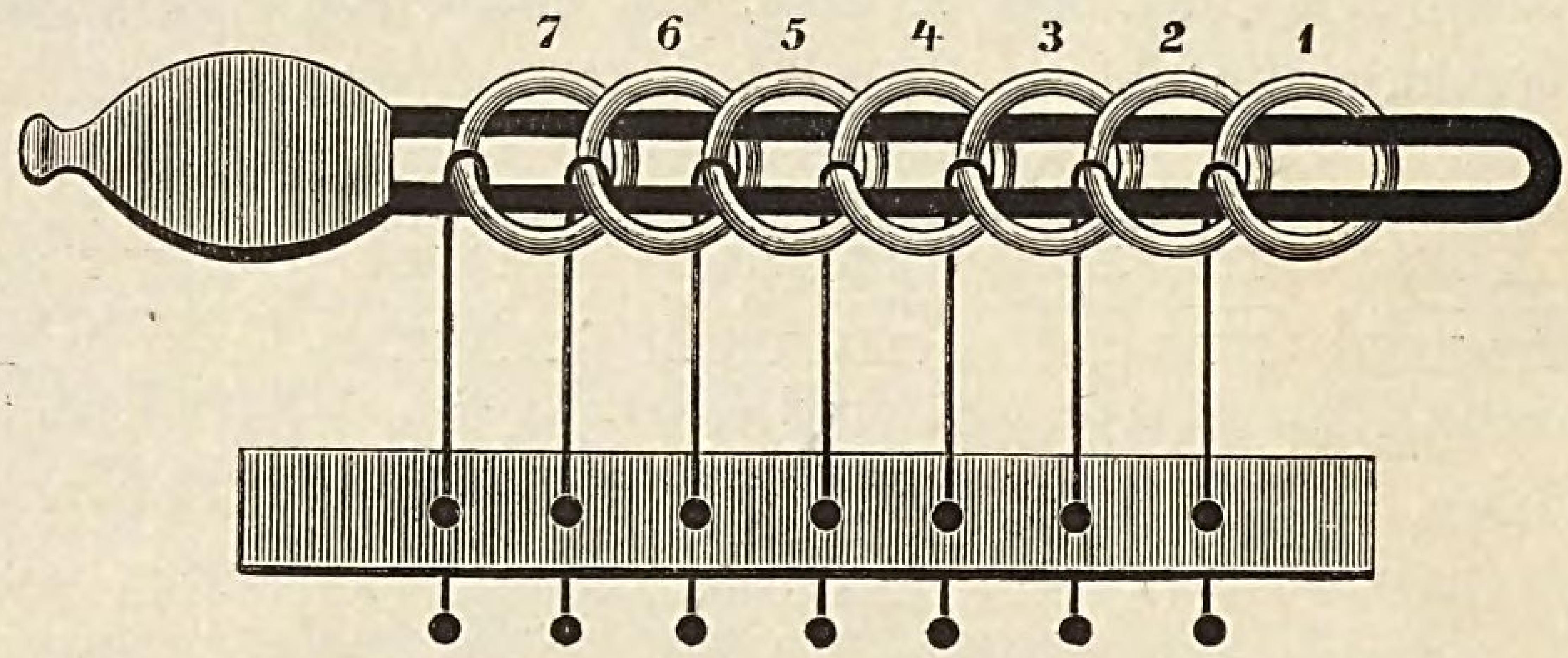
Leibniz sah hierin ein Abbild der Schöpfung aus dem Nichts (der Null) durch die Gottheit (Einheit), und diese Symbolisirung gefiel ihm derart, daß er einen nach China gehenden Missionar bat, sie dem Kaiser dort mitzuteilen, um ihn zu veranlassen, dem Christentum beizutreten.

6.

Das Ringspiel.

In einer eigentümlichen Beziehung zum binären Zahlensystem steht ein seit mehr als drei Jahrhunderten in Frankreich bekanntes Spiel, welches „le baguenaudier“ genannt wird. Die Ableitung dieses Wortes ist nach Lucas[1]), der eine Reihe von historischen Daten beibringt, nicht ganz sicher, da man die erste Hälfte des Wortes aus **bague** = Ring oder **bacca** = Beere, Nuß hat ableiten wollen, die letzte aber bei der Schreibweise **-nodier** freilich nur auf **node**, bei der gebräuchlichen **-naudier** am besten als lateinische Endung

Fig. 84.



-naldarius gedeutet wird. Die wahrscheinlichste Uebertragung würde sein „der Ringknoter“, eine andere, welche man mit „Nußknacker“ wiedergeben könnte, würde sich lediglich auf die Schwierigkeit des Spiels beziehen, ohne auf die Art der Einrichtung hinzudeuten. Die Fig. 84 zeigt dieselbe. Ein Schiffchen mit einem Handgriff trägt sieben Ringe, welche von 1 bis 7 numerirt sind. An jedem Ringe hängt ein Faden, welcher über den nächsten Ring gezogen, mit allen andern durch ein Täfelchen geführt und hinter diesem mit einem Knoten versehen ist, um ein Durchrutschen zu verhindern.

[1]) Récréations mathématiques, par Ed. Lucas. Paris, Gauthier-Villars et Fils. 1893.

Der Faden des siebenten Ringes kann natürlich nicht durch einen nächsten Ring gehen. Der Italiener Cardanus (Pavia, geb. 1501) und der Engländer Wallis (geb. 1616) haben sich beide mit diesem wunderbaren Spiel mathematisch beschäftigt; der erstere in seinem Werke „de subtilitate“, der letztere im zweiten Bande seiner „Algebra“.

Da das Spiel heute fast nur noch historisches Interesse hat, so wollen wir nicht ausführlich, sondern nur andeutungsweise erzählen, worauf es ankommt und nach welchen mathematischen Gesichtspunkten die Lösung gefunden wird. Es handelt sich darum, aus der gezeichneten Lage die Ringe von dem Schiffchen abzuziehen und das Spiel ist beendet, wenn sämmtliche Ringe vom Schiffchen getrennt an dem Täfelchen hängen, durch das sie einzeln gezogen sind. Nehmen wir an, sämmtliche Ringe wären über das Schiffchen gezogen, wie die Figur es zeigt. Nimmt man nun den Griff des Schiffchens in die linke Hand, so kann man stets den ersten Ring nach rechts herunterziehen, auch die beiden ersten gleichzeitig, aber nicht den zweiten, wenn der erste bereits herabgezogen ist, wohl aber dann den dritten. Ist aber der erste und der dritte Ring herabgezogen, so kann man keinen andern mehr heruntergleiten lassen. Es ergeben sich demnach für das Geduldspiel folgende Grundsätze: 1. In irgend einer beliebigen Lage der Ringe kann man den ersten Ring stets hinauf- oder hinunterziehen. 2. Für irgend einen anderen Ring muß aber für diese Möglichkeit die Bedingung erfüllt sein, daß sich der betreffende Ring links von einem aufgezogenen Ringe befindet und daß der letztere der einzige noch aufgezogene Ring rechts von dem betreffenden Ringe ist. In der Fig. 85 bedeutet A, daß sämmtliche Ringe herabhängen, B, daß alle hinaufgeschoben sind. Aus B läßt sich C stets bilden, ebenso auch D, indem man den ersten oder zweiten Ring herunterschiebt. Auch E kann aus B erhalten werden, wenn man die beiden ersten Ringe gleichzeitig auslöst. Dagegen würde man nicht E aus C ableiten können; bei der Lage C kann man nur den dritten Ring herunterholen; ebenso bei der Lage E nur den vierten (F) gemäß unsern Regeln. Alle diese Züge lassen sich stets vornehmen, welches auch die Lage der übrigen Ringe 4, 5, 6, 7 ist. Das allgemeine Problem ist natürlich unabhängig von der Zahl der Ringe

und unsere Lösung soll nicht nur den Weg überhaupt, sondern den kürzesten Weg angeben, auf dem man zum Ziele gelangt. Eine ganz außerordentlich einfache Lösung läßt sich anschaulich machen, wenn man eine Bezeichnung mit den Grundzahlen 0 und 1 des binären Systems (siehe den Abschnitt über „Zahlensysteme“) einführt. Die Ringe werden, wenn sie auf dem Schiffchen sind, mit 0 und 1 abwechselnd bezeichnet, ohne Rücksicht auf die bereits vom Schiffchen heruntergezogenen Ringe. Diese bekommen stets das Zeichen des ersten zu ihrer Linken befindlichen gehobenen Ringes und die Null, wenn sich links kein gehobener Ring mehr befindet. Gehen wir z. B. von folgender Stellung (Fig. 86) aus, wo der dritte, vierte, fünfte und siebente Ring auf dem Schiffchen sind. Dann

Fig. 85.

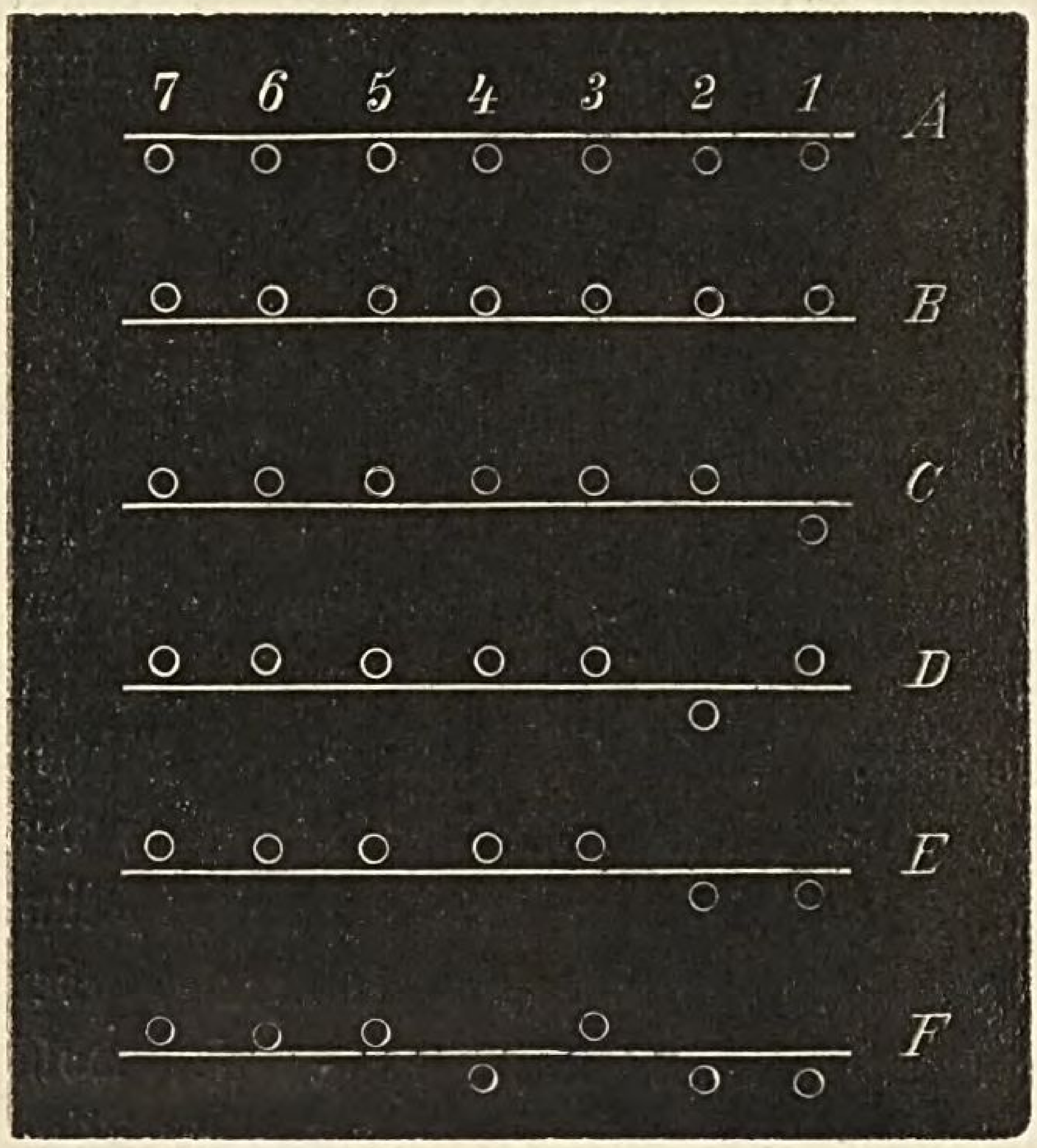


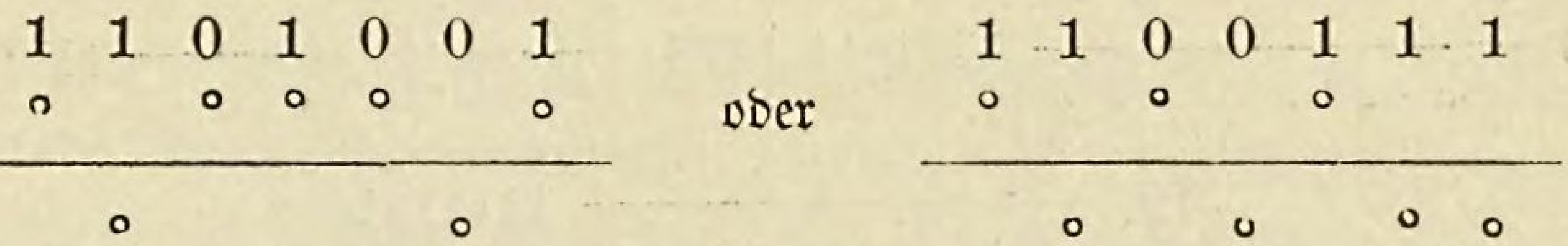
Fig. 86.

```
1   1   0   1   0   0   0
o       o   o   o
---------------------------
    o               o   o
7   6       5  43   2   1
```

muß der erste Ring rechts das Zeichen 0 haben, da er nicht gehoben ist, die nächsten gehobenen haben abwechselnd die Zeichen 0, 1, 0, 1, die beiden übrig bleibenden, der zweite und sechste, bekommen das Vorzeichen des benachbarten gehobenen Ringes an ihrer linken Seite, also bzw. 0 und 1. Ueberlegt man sich jetzt gemäß den gegebenen Regeln, welche Veränderungen möglich sind, so hat man die Wahl, entweder den ersten Ring, der dann natürlich das Zeichen 1 bekommt, da der nächste auf dem Schiffchen befind-

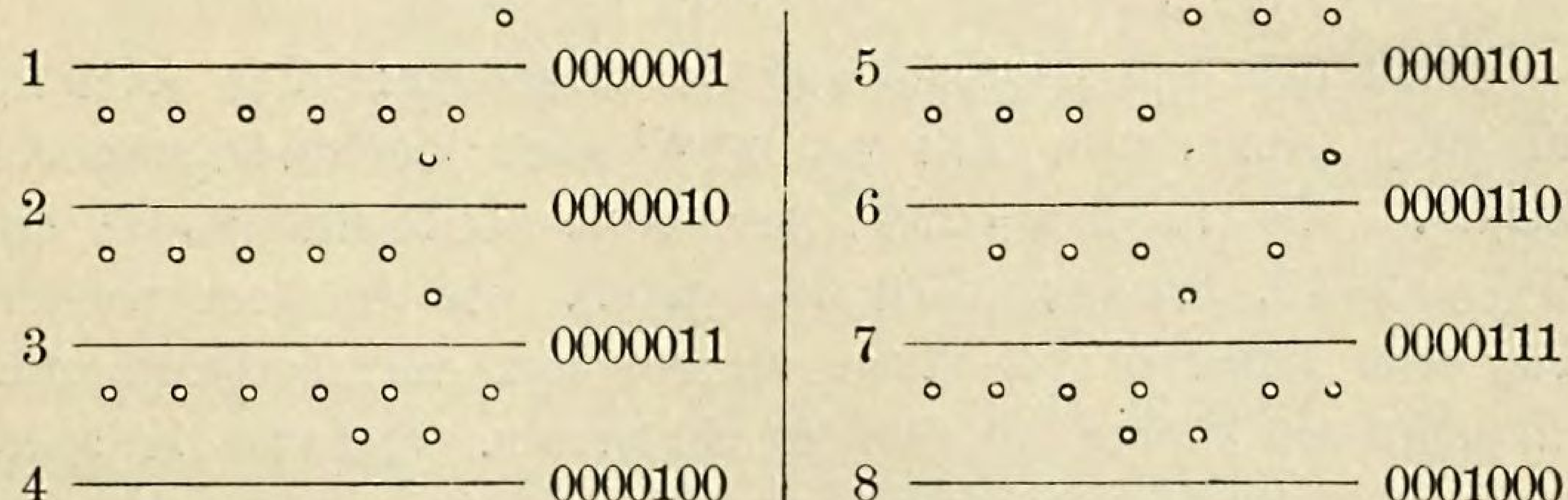
liche die Null trägt, zu heben oder den vierten zu senken. Dann erhält der vierte Ring, sobald er unten ist, das Zeichen Null; der dritte daher die Eins und ebenso die ersten beiden. Die Stellungen sind dann folgende (Fig. 87):

Fig. 87.



Betrachtet man nun die darüber stehenden Zeichen in ihrer Gesammtheit als Zahlformen des binären Systems, so sind die drei Zahlen 1100111, 1101000, 1101001 aufeinanderfolgende Zahlen desselben. Die erste Möglichkeit 1101001 stellt also eine Addition, die zweite 1100111 eine Subtraktion um eine Einheit dar. Der gegebene Weg, die Knoten der Ringe zu lösen, entspricht daher der Aufeinanderfolge der im binären System geschriebenen Zahlen der natürlichen Zahlenreihe. Man schürzt den Knoten, indem man von der Null beginnend, alle Zahlen der Reihe nach so darstellt, daß die Stellung der Ringe die binären Formen dieser Zahlen darstellt. Man löst den Knoten, indem man in der Zahlenreihe wieder bis zur Null zurückgeht. Will man wissen, wie viel Umstellungen man machen muß, um aus einer bestimmten Stellung der Ringe eine andere herzustellen, so schreibt man die zugehörigen Charaktere des binären Systems hin, rechnet die Zahlen in das dezimale System um und bildet deren Differenz. Diese giebt die geringste Anzahl der Operationen an, durch welche die verlangte Ueberführung erreicht werden kann. Wir geben hier die ersten und letzten Stellungen des Spieles. Die letzteren führen die Nummern 121 bis 127. Bei 128 ist das Spiel beendet. (Fig. 88).

Fig. 88.



(Zu Fig. 88.)

```
     o       o   o                         o           o
121 ———————————————— 1111001   124 ———————————————— 1111100
        o  o  o    o                  o  o  o  o   o

     o       o  o  o                   o           o  o
122 ———————————————— 1111010   125 ———————————————— 1111101
        o  o  o                       o  o     o

     o       o  o                      o              o
123 ———————————————— 1111011   126 ———————————————— 1111110
        o  o  o    o                  o  o  o  o  o

                         o
             127 ———————————————— 1111111
                   o  o  o  o  o  o
```

Jede vor der Ringstellung befindliche Zahl wird durch die binäre Zahlenform hinter derselben dargestellt. Will man nun die Ringe wieder herunterschieben, so macht man den Prozeß rückwärts durch.

Jetzt wollen wir untersuchen, bei welcher Form die Ringe sämmtlich aufgezogen sind. Nach unserer Feststellung sind sämmtliche Ringe aufgezogen, sobald man die Charakteristik

```
 ( o  o  o  o  o  o  o )
 (———————————————————————) 1010101
```

erreicht; diese Zahl bedeutet aber im Dezimalsystem $2^6 + 2^4 + 2^2 + 1 = 85$. Demnach sind 85 Umstellungen nötig, um entweder die Ringe zu formiren oder zu heben. Sind zehn Ringe aufzuziehen, so lautet die Charakteristik $1010101010 = 2^9 + 2^7 + 2^5 + 2^3 + 2 = 682$. Für eine ungerade Anzahl Ringe hat man die Summe der geraden Potenzen, für eine gerade Anzahl die der ungeraden Potenzen von 2 zu bilden. Ist also $2k$ bzw. $2k+1$ die Zahl der Ringe, so ist die Zahl der Operationen

$$P_{2k} = 2^{2k-1} + 2^{2k-3} + \ldots.\, 2^3 + 2 = \frac{2^{2k+1} - 2}{3}$$

$$P_{2k+1} = 2^{2k} + 2^{2k-2} + \ldots\, 2^2 + 1 = \frac{2^{2k+2} - 1}{3}$$

Man kann das Ergebnis auch so ausdrücken: Die Zahl P_n ist gleich dem dritten Teil von 2^{n+1} ohne Berücksichtigung des Restes. So ist $2^8 = 256$, der dritte Teil also 85 (s. o.), $2^{11} = 2048$, der dritte Teil 682 (s. o.). Es sei noch bemerkt, daß beim Aufziehen der Ringe die Lösungen aller vorhergehenden Anzahlen von Ringen mit durchgemacht werden. Hat man beispielsweise sieben Ringe, so ist der Schlußzahl 1010101 die Zahl (0)101010

vorhergegangen. Diese aber ist die Schlußzahl für sechs Ringe. Aus den angefügten Tabellen sieht man, daß die 127ste Stellung die Aufnahme des achten Ringes vorbereitet: denn bei der nächsten Stellung muß die Charakteristik achtziffrig sein, da auf die Zahl 1111111 folgt 10000000.

Demnach ist die durch die höchste siebenziffrige Zahl des binären Systems dargestellte Anordnung zugleich die komplizirteste, welche sich mit sieben Ringen darstellen läßt; sie ist gleich $2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 1 = 127$ im dezimalen System. Nun ist aber $127 = 2^7 - 1$ und es ist also allgemein bei n Ringen die $(2^n - 1)$ste Anordnung die komplizirteste, welche sich bei dieser Ringzahl erreichen läßt. Für solche Leser, die tiefer in die Zahlentheorie eingedrungen sind, möge hinzugefügt werden, daß 2^n genau die Anzahl aller Kombinationen von n Objekten, genommen zu 1 bei 1 oder zu 2 bei 2 bis n bei n, ist. Entwickeln wir z. B. das Binom:

$$(a + b)^7 = a^7 + 7a^6b + \frac{7.6}{1.2}a^5b^2 + \frac{7.6.5}{1.2.3}a^4b^3 + \frac{7.6.5.4}{1.2.3.4}a^3b^4 + \frac{7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5}a^2b^5 + \frac{7.6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5.6}ab^6 + b^7.$$

Die Koeffizienten dieser Reihe mit Ausnahme des ersten $7 + 21 + 35 + 35 + 21 + 7 + 1$ bilden die Summe $(2^7 - 1) = 127$. Allgemein für $(a + b)^n$ bilden dieselben Koeffizienten die Summe $(2^n - 1)$.

Die Buchstaben t, u, v, w, x, y, z, welche wir uns einmal an Stelle der sieben Ringe genommen denken können, geben für sich genommen sieben Kombinationen, zu zweien aber 21 (z. B. tu, tv, tw . . . .), zu dreien und vieren je 35 (z. B. tuv, tuw . . . . oder tuvw, tuvx . . .), zu fünfen genommen wieder 21 und zu sechsen genommen 7, dagegen zu sieben genommen nur die Kombination tuvwxyz, also eine. Unser Spiel stellt daher alle Kombinationen ohne Wiederholung von n Objekten dar, ebenso aber auch die Ordnung, in denen diese Kombinationen genommen werden müssen.

Man hat auch berechnet, wie viel Zeit es erfordert, um die Ringe vom Schiffchen zu lösen oder darauf zu schieben. Es erfordern nach praktischen Versuchen:

5 Ringe mit 21 Veränderungen . . . . 20^s.
7 Ringe mit 85 Veränderungen . . $1^m 20^s$.
9 Ringe mit 341 Veränderungen . . $5^m 20^s$.
11 Ringe mit 1365 Veränderungen . . $21^m 20^s$.
13 Ringe mit 5461 Veränderungen $1^h 25^m 20^s$.

Das gewöhnliche Spiel kann demnach in 1⅓ Minute beendet werden, wenn man große Uebung darin besitzt. Ebenso würden 25 Ringe $349\,500^m$ erfordern, d. h. 582 Tage, wenn man sich täglich 10 Stunden mit dem Problem beschäftigen würde.

Die vorhin erläuterte Summe

$$2^n - 1 = 1 + 2 + 2^2 + \ldots . 2^{n-1}$$

hat einige Berühmtheit erlangt durch die Erzählung von der Erfindung des Schachspiels. Ein König in Indien, Namens Sheran, verlangte, nach dem Berichte des arabischen Schriftstellers Asephad, daß Sessa, der Erfinder des Schachspiels, sich selbst eine Belohnung wählen sollte. Dieser erbat sich hierauf die Summe der Weizenkörner, die herauskommt, wenn 1 für das erste Feld des Schachbrettes, 2 für das zweite, 4 für das dritte und so immer für jedes der 64 Felder doppelt so viel Körner als für das vorhergehende gerechnet werden. Der König lachte und befahl, einen Sack mit Weizenkörnern herbeizuschaffen, um die Belohnung daraus abzuzählen. Wie erstaunte er aber, als man ihm meldete, daß die ungeheure Summe von 18 446 744 073 709 551 615 Körnern sich ergab. In der That ist die Summe der geometrischen Reihe, die sich zur Hälfte in der folgenden Tabelle (Fig. 89) findet, $= 2^{64} - 1$, so daß man, um jene Zahl zu erhalten, die letzte Zahl der Tabelle noch mit sich selbst multipliziren und dann Eins subtrahiren müßte. Wir können uns von ihrer Entstehung schnell eine Vorstellung verschaffen, wenn wir bedenken, daß $2^{10} = 1024$, daher 2^{20} mehr als eine Million, 2^{40} mehr als eine Billion, 2^{60} mehr als eine Trillion und daher 2^{64} mehr als 16 Trillionen beträgt.

Mit dieser Reihe, bei der der Quotient aufeinanderfolgender Glieder stets 2 ist, hängt das Bildungsgesetz der sogenannten **vollkommenen Zahlen** zusammen, mit denen sich die Zahlentheoretiker häufiger beschäftigt haben. Ist nämlich für irgend einen Exponenten n die Summe $2^n - 1$ der ersten n Glieder eine Prim-

zahl, d. h. eine solche, die außer Eins und sich selber keinen Faktor enthält, so ergiebt diese Primzahl, wenn sie ihrerseits mit 2^{n-1} multiplizirt wird, eine vollkommene Zahl, die die Eigenschaft hat, daß die Summe ihrer Faktoren ihr selbst gleich ist. Zunächst

Fig. 89. Potenzen von 2.

n	2^n	n	2^n	n	2^n	n	2^n
1	2	9	512	17	131 072	25	33 554 432
2	4	10	1024	18	262 144	26	67 108 864
3	8	11	2048	19	524 288	27	134 217 728
4	16	12	4096	20	1 048 576	28	268 435 456
5	32	13	8192	21	2 097 152	29	536 870 912
6	64	14	16 384	22	4 194 304	30	1 073 741 824
7	128	15	32 768	23	8 388 608	31	2 174 483 648
8	256	16	65 536	24	16 777 216	32	4 294 967 296

muß, wie sich zeigen läßt, wenn $2^n - 1$ eine Primzahl sein soll, auch n eine solche sein. Wir können also alle Zahlen n der natürlichen Zahlenreihe als unbrauchbar ausscheiden, die nicht selber Primzahlen sind. Außerdem fallen noch bis 31 die Zahlen 11, 23 und

Fig. 89a. Tabelle der vollkommenen Zahlen.

	α	$2^{\alpha-1}$	$2^{\alpha}-1$	Vollkommene Zahlen
1	2	2	3	6
2	3	4	7	28
3	5	16	31	496
4	7	64	127	8128
5	13	4096	8191	33 550 336
6	17	65 536	131 071	8 589 869 056
7	19	262 144	524 287	137 438 691 328
8	31	1 073 741 824	2 147 483 647	2 305 843 008 139 452 128

29 aus, da $2^{11} - 1$ durch 23, $2^{23} - 1$ durch 47, 2^{29} durch 233 teilbar ist. Die übrigen liefern vollkommene Zahlen, welche sich nebst ihren Exponenten und Faktoren in der beistehenden Tabelle (Fig. 89) verzeichnet finden. Wie man sieht, endigen alle vollkommenen Zahlen entweder mit 8 oder mit 6. Die auf 31 folgenden drei nächsten

brauchbaren Werte von n sind 67, 127 und 267, welche uns bereits von dem Jesuitenpater Mersenne (siehe den Abschnitt über „magische Quadrate", wo sein Briefwechsel mit Fermat erwähnt ist) überliefert worden sind. Wenn man die der Zahl 31 entsprechende vollkommene Zahl $2^{30}.(2^{31}-1)$ in der Tabelle betrachtet, so kann man sich einen Begriff davon machen, welche Rechnungen erforderlich waren, um diese Tabelle fortzusetzen, da man ja sämmtliche Primzahlen für n einzusetzen und nachzusehen hatte, ob sich eine vollkommene Zahl ergab oder nicht. Die letzte von Mersenne als Primzahl bestätigte Zahl $(2^{257}-1)$ hat nicht weniger als 78 Ziffern und es mag, um eine Vorstellung von der Größe dieser Ziffer zu geben, bemerkt werden, daß, wenn man sämmtliche Bewohner der Erde zu 1000 Millionen annimmt, diese gleichzeitig und ohne Unterbrechung eine Anzahl von Jahrhunderten zählen müßten, um eine Zahl zu erhalten, die durch 20 Ziffern dargestellt wird. Mit einer der neuesten Rechenmaschinen würde ein Einzelner diese Zahl in drei Monaten erhalten können. Logarithmisch würde sie sich wegen der Unvollkommenheit der Tabellen nicht genau berechnen lassen. Die zweite Zahl der Tabelle, 28, besitzt die Faktoren 1, 2, 4, 7, 14, deren Summe 28 ist, die dritte 496 enthält die Zahlen 1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124, 248 als Faktoren, deren Summe wieder die Zahl selber ergiebt.

Dies waren die vollkommenen Zahlen; befreundet nennt man dagegen zwei solche Zahlen, von denen jede gleich der Summe der Faktoren der anderen ist. So sind 220 und 284 befreundete Zahlen, da $220 = 1 + 2 + 4 + 71 + 142$ den Faktoren von 284 gleich ist und $284 = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110$, also gleich den Faktoren von 220 ist. Jede ist der anderen Ich, während jede vollkommene Zahl gewissermaßen ihr eigenes „alter ego" ist.

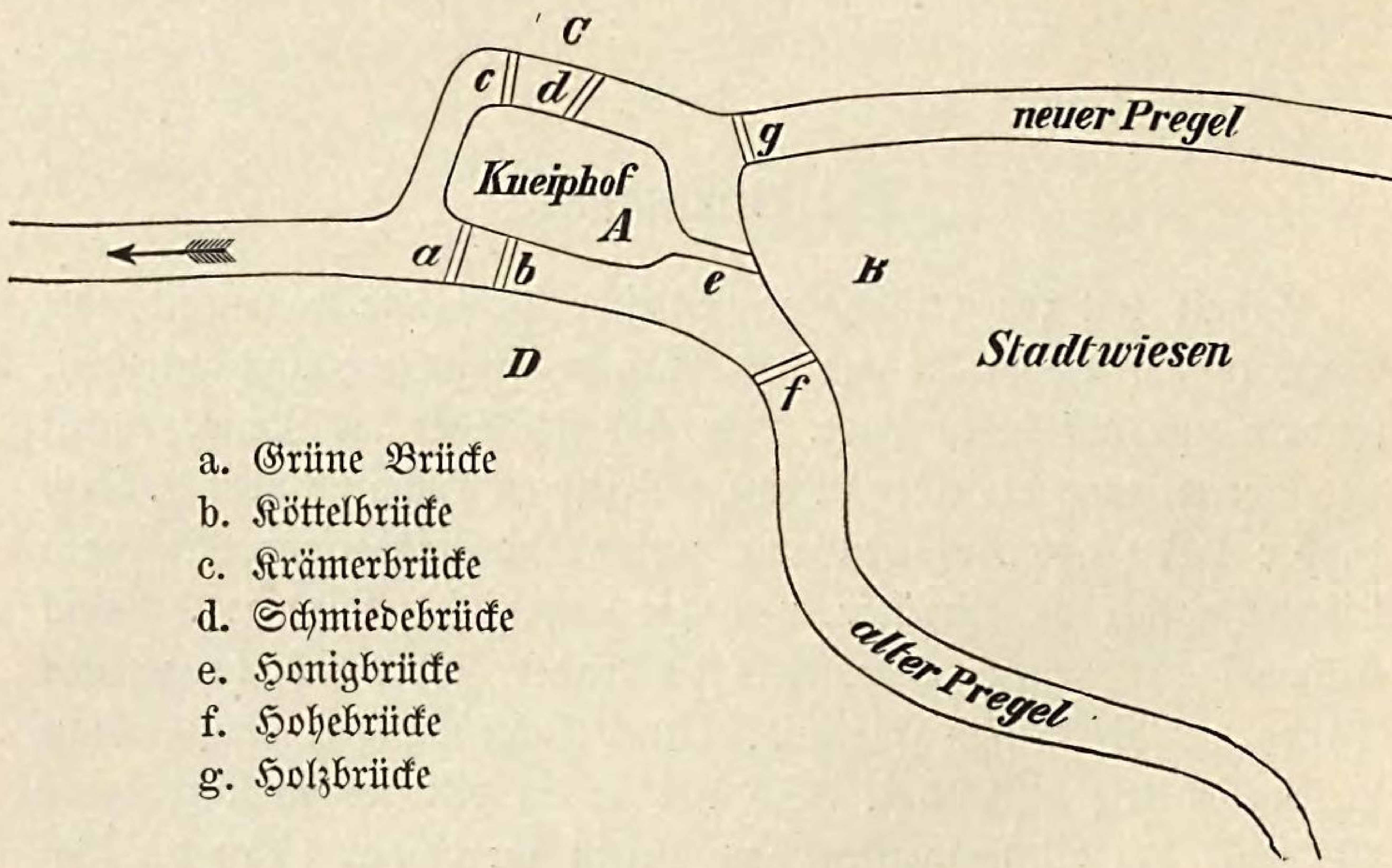
7.

Das Brückenspiel.

Leibniz hat zuerst solche geometrische Probleme behandelt, bei denen es auf die Größe und das Maß der Teile gar nicht ankommt, sondern nur auf deren Lage. Er hat sich über die Notwendigkeit und Berechtigung derselben in einem Briefe an Huygens vom 8. September 1679 ausgesprochen und meint, die bisherigen Methoden lieferten weder die kürzesten, noch die elegantesten Lösungen. Sein Entwurf der neuen „Geometrie der Lage" findet sich im zweiten Bande der Werke von Huygens. Auch Euler hat sich häufiger mit Lagengeometrie beschäftigt. So hat er in den Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften von Berlin im Jahre 1759 die Bewegung des Springers im Schachspiel, die analog derjenigen ist, welche man beim Lösen des Rösselsprunges machen muß, behandelt. Der Springer geht stets zwei Schritte vorwärts und einen seitwärts oder umgekehrt. Euler fand die Lösung auf experimentellem Wege. Vandermonde vervollkommnete und vereinfachte zwei Jahrzehnte später die Methode von Euler. Am praktischsten ist folgende von Warnsdorff in Schmalkalden (1823) gegebene Regel: „Man setze den Springer auf dasjenige Feld, von welchem die wenigsten Ausgänge auf noch unbenutzte Felder übrig sind." Man findet in dem bei Reclam erschienenen „Freund'schen Rätselschatz" eine Reihe hierher gehöriger Aufgaben und bei Lucas eine große Menge Literaturangaben. Wir wollen uns im Folgenden mit einem andern Problem ähnlicher Art beschäftigen, welches von Euler zuerst aufgestellt und entworfen wurde. Es hängt zusammen mit der Frage nach dem Durchlaufen eines Labyrinths und mit den Lösungen des Dominospiels, welche wir beide in besonderen Abschnitten behandeln.

Bei der Stadt Königsberg, in welcher Jahre lang Euler mit Kant zusammen lebte und wirkte, umspült der Pregel eine Insel, den Kneiphof. Stromaufwärts teilt er sich in zwei Arme (Fig. 90). Die vier dadurch gebildeten Landstreifen A, B, C, D sind durch folgende sieben Brücken verbunden.

Fig. 90.



a. Grüne Brücke
b. Köttelbrücke
c. Krämerbrücke
d. Schmiedebrücke
e. Honigbrücke
f. Hohebrücke
g. Holzbrücke

Euler warf nun die Frage auf, ob man wohl einen Umlauf vollenden könne, bei welchem man alle Brücken, aber jede nur einmal passire? Man könnte nun so vorgehen, daß man sämmtliche Möglichkeiten nach der Reihe durchprobirte: aber abgesehen davon, daß dies eine sehr langwierige Arbeit sein würde und daß man doch, um keinen Fall zu vergessen, eine bestimmte Reihenfolge in den Kombinationen würde beobachten müssen, würde ein mathematischer Geist nicht von einer solchen Methode befriedigt sein, da er zu der Lösung einer viel allgemeineren Aufgabe sich gedrängt fühlen würde. So ging es auch Euler und er stellte sich die Frage: „Welches auch die Form eines Stromes, die Zahl seiner Arme und Inseln ist, wie groß ferner die Zahl der Brücken ist,“ es soll dieselbe Frage, wie oben für den besonderen Fall gestellt wurde, beantwortet werden.

Wir wollen zunächst bei unserm besonderen Fall bleiben und ohne Rücksicht auf die Brücken einen beliebigen Weg durch die Buch-

staben der Landstreifen bezeichnen, so daß z. B. A B D C bedeutet, daß man sich von A über B und D nach C begeben hat. Zu diesem Zwecke wird man drei Brücken passiren müssen. Eine Reihenfolge von n großen Buchstaben wird demnach anzeigen, daß (n — 1) Brücken benutzt worden sind. Nun deutet, wie eine einfache Ueberlegung zeigt, ein einmaliges Vorkommen eines großen Buchstabens, also das Passiren eines Landstreifens darauf hin, daß eine oder zwei seiner Brücken benutzt worden sind, je nachdem der Buchstabe am Anfang und Ende oder zwischen zwei anderen steht. Da nun jede Brücke nur einmal benutzt werden soll, so muß demnach, wenn fünf oder sechs nach einem Landstreifen führende Brücken benutzt worden sind, der Buchstabe desselben dreimal vorkommen. Führen allgemein zu einem Landstreifen 2n + 1 oder 2n + 2 Brücken, so ist die Zahl seines Vorkommens, wenn sämmtliche Brücken benutzt worden sind, gleich (n + 1). In unserem besonderen Falle führen nach dem Kneiphof (A) fünf Brücken, nach den übrigen Bezirken (B, C, D) je drei Brücken. In einem Umlaufe muß daher A dreimal, B, C, D je zweimal vorkommen. Neun große Buchstaben müssen demnach den Weg bezeichnen, wenn jede Brücke mindestens einmal benutzt werden soll. Da jedoch nur sieben Brücken vorhanden sind und jede doch nur einmal vorkommen soll, so dürfen den Bedingungen der Aufgabe gemäß nur acht große Buchstaben den Weg bezeichnen. Die Lösung unserer Aufgabe ist demnach unmöglich. Wir wollen sie in nebenstehender Form (Fig. 91) darstellen. Die erste Zahlenreihe deutet auf die Zahl der Brücken hin, die zweite giebt an, wie oft in einem vollständigen Umlauf jeder Bezirk vorkommen muß. Da die Summe dieser Zahlen Neun ist und nur Acht sein darf, so ist die Lösung der Aufgabe unmöglich.

Fig. 91.

A	5	3
B	3	2
C	3	2
D	3	2
	Summe:	9

Wir wollen jetzt einen etwas komplizirteren Fall zu Grunde legen und dieselbe Methode darauf anwenden. Die sieben Bezirke A, B, C, D, E, F, G (Fig. 92) sind durch 15 Brücken verbunden und das Schema ist das in Fig. 93 angegebene. Bei einem vollständigen Umlauf dürften nur 16 Buchstaben vorkommen, es müssen aber hier 17 Bezirke passirt werden. Die Aufgabe läßt daher wiederum keine Lösung zu. Führt man aber von D nach E eine neue Brücke,

so ändert sich die Summe 17 nicht und die Lösung ist dann möglich, weil bei 16 Brücken thatsächlich 17 Bezirke einen Umlauf bilden.

Fig. 92.

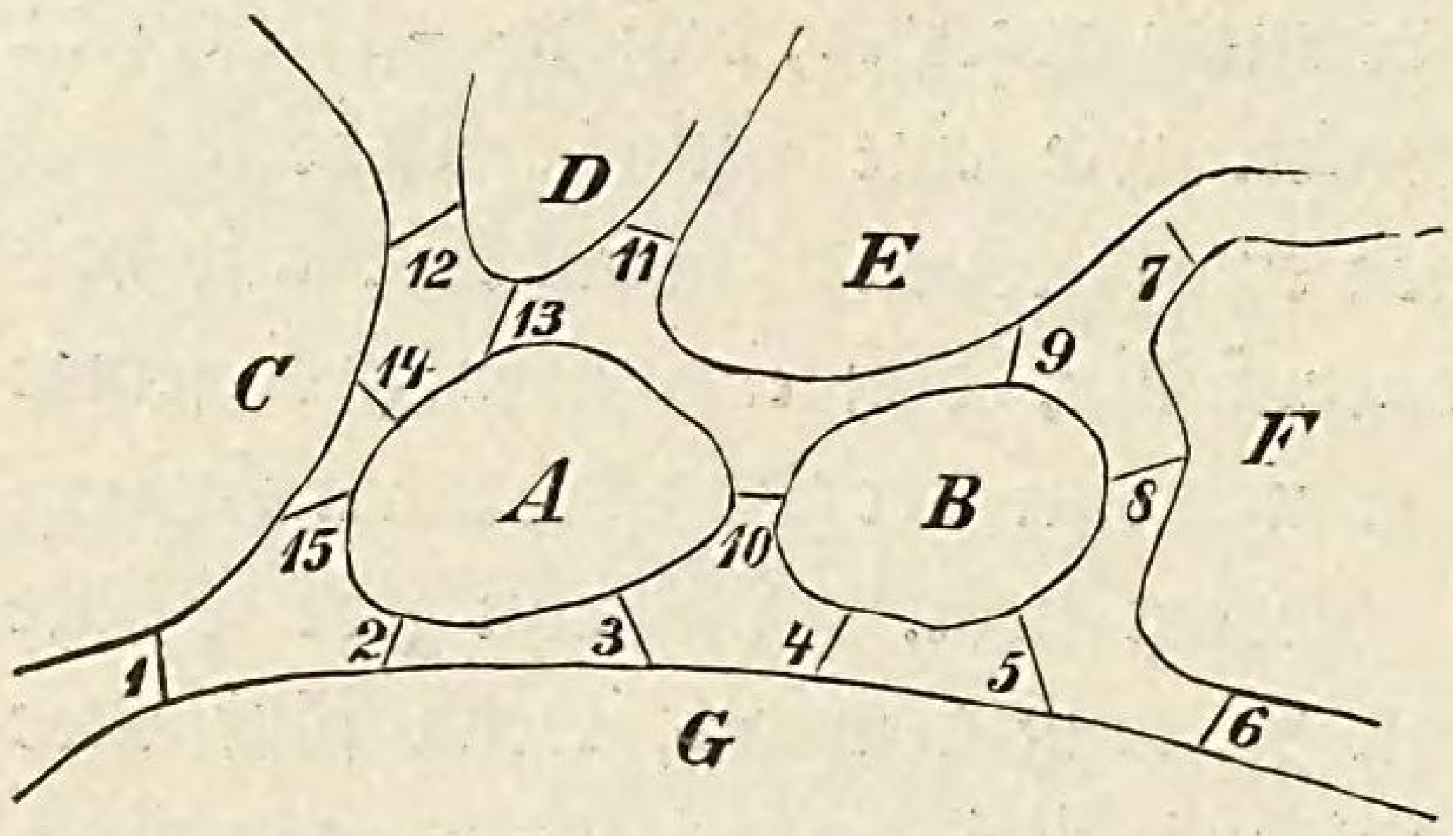


Fig. 93.

A	6	3
B	5	3
C	4	2
D	3	2
E	3	2
F	3	2
G	6	3
		Summe: 17

Führt man auch von E nach F noch eine siebenzehnte Brücke, so bleibt wieder die Summe unverändert: es sind ebenso viele Brücken da, als Bezirke in einem Umlauf vorkommen müssen. Die Lösung ist dann nur möglich, wenn man mit einem Bezirke beginnt, dem eine gerade Anzahl von Brücken angehört, während man bei der vorigen Lösung mit einem ungeraden Bezirk beginnen muß.

In unserem letzten Beispiel giebt die Figur in der Reihenfolge der Buchstaben an den 15 Brücken sofort die Lösung an (Fig. 94). Sie lautet:

Ea Fb Bc Fd Ae Ff Cg Ah Ci Dk Am En Ap Bq El D.

Fig. 94.

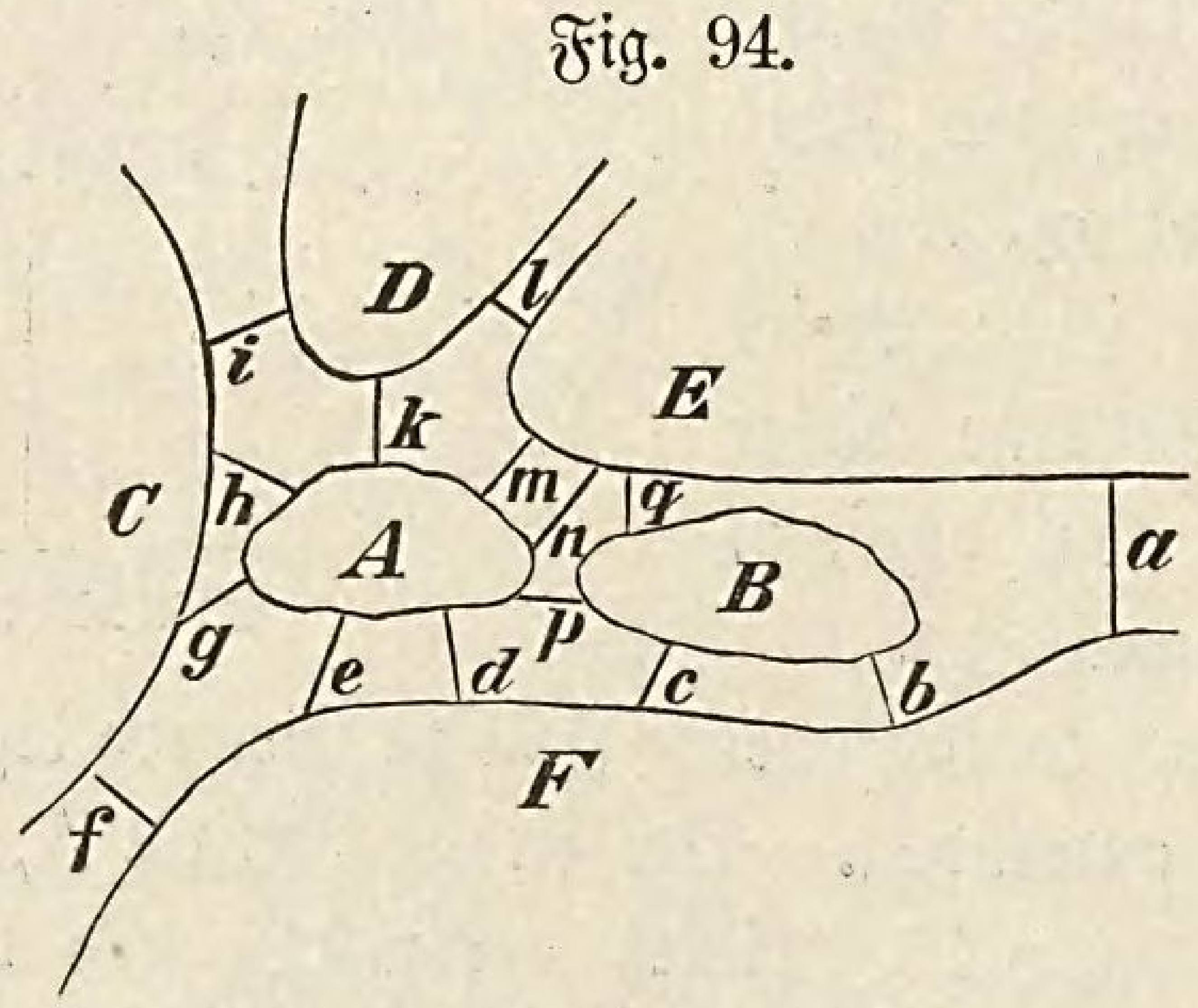


Fig. 95.

A	8	4
B	4	2
C	4	2
D	3	2
E	5	3
F	6	3
		Summe: 16

Der Weg wird in E begonnen und endet in D, kann jedoch natürlich auch in umgekehrter Reihenfolge vorgenommen werden. Das Schema ist vorstehendes (Fig. 95).

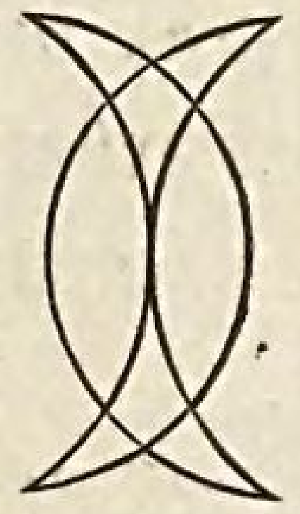
Wir haben durch diese Euler'sche Methode ein Verfahren erhalten,

welches uns gestattet, beurteilen zu können, ob in irgend einem bestimmten Falle eine Lösung möglich ist oder nicht. Die in der ersten Vertikalreihe des Schemas stehenden Zahlen bilden eine Zahl gleich der doppelten Anzahl aller Brücken, da ja jede Brücke in zwei Bereichen ihre Endpunkte hat. Wie groß die Anzahl der Brücken demnach auch ist, jene Summe der ersten Reihe ergiebt eine gerade Zahl. Sind nun alle Bereiche paarig, so ist die Summe der Zahlen in der zweiten Vertikalreihe genau die Hälfte von derjenigen in der ersten und daher eine Lösung auf alle Fälle möglich. Wäre eine ungerade Anzahl Bereiche mit ungerader Brückenzahl dabei, so könnte unmöglich die erste Summe eine gerade Zahl sein. Da sie aber als doppelte Brückenzahl gerade sein muß, so kann es überhaupt nicht vorkommen, daß eine ungerade Anzahl unpaariger Bereiche vorhanden ist. Da aber wiederum die Summe der zweiten Kolonne des Schemas höchstens um eine Einheit die Zahl der Brücken übertreffen darf, so ist eine Lösung nur noch möglich, wenn zwei unpaarige Bereiche vorkommen. Bei vier Bereichen dieser Art würde ja, wie das eine der obigen Beispiele zeigt, die zweite Summe bereits um zwei Einheiten größer sein, als die Zahl der Brücken.

Diese einfache allgemeine Lösung des Brückenproblems gestattet uns nun noch einige interessante Anwendungen. Lassen wir die Bereiche A B C . . . zu Ecken zusammenschrumpfen und stellen uns unter den zwischen ihnen möglichen Verbindungslinien Brücken vor, so sind wir bei einer geometrischen Figur angelangt und können die Frage beantworten, ob es möglich sein würde, von einer Ecke beginnend sämmtliche Seiten und Diagonalen einer Figur in einem ununterbrochenen Zuge, aber jede nur einmal, zu durchlaufen oder zu zeichnen. Das wird stets möglich sein, wenn von allen Ecken nur eine gerade Anzahl oder höchstens von zwei Ecken eine ungerade Anzahl von Verbindungslinien ausgeht. Um diese Entscheidung von vornherein treffen zu können, wollen wir uns erinnern, daß in einem n-Eck von jeder Ecke eine Verbindungslinie (Seite oder Diagonale) weniger ausgeht, als Ecken vorhanden sind, also $(n - 1)$. Da nun n Ecken vorhanden sind, so würde es $n \times (n - 1)$ Linien in dem Netze geben, wenn nicht jede zwei Endpunkte hätte und daher doppelt gezählt wäre. Die wahre Anzahl ist demnach $\frac{n \times (n - 1)}{2}$.

Zeichnet man einmal für regelmäßige Vielecke solche vollständige Netze, so entdeckt man in den entstandenen Schnittpunkten gewisse Regelmäßigkeiten, die der Figur einen gefälligen, künstlerischen Ausdruck geben. Es ist nun klar, daß sich sämmtliche Netze unbedingt in einem Zuge zeichnen lassen, bei denen die Zahl der Ecken eine ungerade ist, da ja dann sämmtliche Bereiche paarig sind. Ein Viereck mit seinen Diagonalen läßt sich dagegen nicht in einem Zuge zeichnen, da die vier Ecken sämmtlich unpaarig sind. Das merkwürdige Pentagramm, von dem wir bereits im ersten Abschnitt gesprochen haben, hat lauter paarige Bereiche, da von jeder Ecke zwei Seiten und zwei Diagonalen ausgehen: man wird es leicht in einem Zuge zeichnen können. Von Mahomet erzählt man, daß er die Figur des doppelten Halbmondes in einem Zuge gezeichnet habe. Die Betrachtung der Fig. 96 wird lehren, wie und warum das möglich ist. Der verstorbene Göttinger Mathematiker Listing beschäftigte sich gern und oft mit einem Zweige der Lagengeometrie, mit der „Topologie“. Seine „Vorstudien zur Topologie“, sowie „Der Census der räumlichen Komplexe“ sind leider wenig bekannt, bilden aber einen wichtigen Beitrag zur Theorie der Gewebe, die ja nichts weiter darstellen als ein Netz von Fäden, aus Kette und Einschlag gebildet. In dem ersten Bande des Werkes von Lucas (Seite 36) findet sich eine sehr komplizirte Figur, die ein symmetrisches Muster darstellt und in einem Zuge gezeichnet werden kann.

Fig. 96.



8.

Labyrinth.

Wie zu den Zeiten des Altertums, so wird auch heute noch ein Labyrinth für ein Gewirr von Gängen gehalten, deren unzählige Verzweigungen es dem Besucher unmöglich machen, den Ausgang zu finden. Wir werden zeigen, daß es eine einfache Regel giebt, um aus jedem Labyrinth mit leichter Mühe sich wieder herauszufinden. Doch zuvor wollen wir einige historische Bemerkungen über die Labyrinthe machen. Die Berichte aus dem Altertum sind voll von den Wundern dieser Bauwerke, die meistens als Grabstätten dienten. In Aegypten, von dessen früher Kultur ja noch in unserer Zeit Zeugen vorhanden sind, waren zwei Labyrinthe auf dem See Möris sehr berühmt. Dieser See lag — heute ist er eingetrocknet — im Delta des Nils, mit dem er durch Kanäle verbunden war. In dem See lag die Insel Mendes, auf der Psammetich zwei Labyrinthe errichten ließ. Das eine war der Sonne geweiht und bestand aus einer Reihe mit einander verbundener Tempel. Die Gänge bildeten Labyrinthe und das Ganze hatte eine gewaltige Ausdehnung. Am bekanntesten ist das Labyrinth auf der Insel Kreta geworden, besonders durch die Beschreibung, welche Ovid im achten Buche seiner Metamorphosen von ihm giebt. Der König Minos ließ es durch den berühmten Dädalus erbauen, um ein Ungeheuer, den Minotaurus, aufzunehmen. Mehrere gedeckte Galerien, welche sich noch heute auf der neuerdings durch die politischen Verwickelungen viel genannten Insel befinden, werden als Ueberreste jenes Bauwerkes von den Bewohnern angesprochen. Der berühmte Botaniker Tournefort fand im Jahre 1702 eine Art Labyrinth am Fuße des Berges Ida, dessen Besuch er in seiner „Voyage du Levant“ beschreibt. Es schienen gewisse Vorsichts-

maßregeln erforderlich gewesen zu sein, um den Rückweg nicht zu verfehlen. Andere Reste giebt es noch auf Lemnos, in Agrigent und in Klusium. Letzteres Bauwerk diente dem Porsenna als Grabmal; Plinius berichtet darüber und nennt es ein Monument menschlicher Narrheit und Eitelkeit.

In den gothischen Kirchen des Mittelalters finden sich Labyrinthe durch die Form und Farbe der Fußbodenpflasterung angedeutet. Den Mittelpunkt bildet dann eine Kalvariengruppe. Lucas zählt eine Reihe solcher Kirchen in Frankreich auf und erwähnt auch zwei Labyrinthe in Paris, deren eines „Ossuaire des Catacombes" genannt wird. Dieses wird gelegentlich besucht, während das andere im Jardin des Plantes[1]) den spielenden Kindern als Aufenthaltsort dient. Der Name Labyrinth soll seinen Ursprung haben von der Bezeichnung des ägyptischen Labyrinthes im Möris-See, welches Lopero-hunt[2]) hieß.

Um nun ein anschauliches Bild von einem solchen Labyrinth zu erhalten, nehmen wir ein Blatt Papier und zeichnen eine Anzahl von Punkten. Diese stellen die Ecken des Labyrinths dar. Dann verbinden wir diese Punkte durch gerade oder krumme Linien in beliebiger Menge so, daß kein Punkt von einem andern isolirt bleibt. Einen solchen Anblick gewährt z. B. das Pferdebahnnetz einer Stadt, ebenso auch das Eisenbahnnetz oder Kanalnetz eines Landes (vergl. hierzu den Abschnitt über „Reisespiele"). Geht man nun von einem beliebigen Punkte aus und durchwandert mit dem Auge alle Linien in einer bestimmten Reihenfolge, so ist die Aufgabe die, an den Ausgangspunkt sich zurückzufinden. Um nun den Weg des Auges sich merken zu können, mache man einen kleinen Querstrich über jeden Weg, sobald man an eine Ecke kommt oder dieselbe verläßt. Wir werden zeigen, daß das Auge alle Linien des Netzes ohne Sprung durch-

---

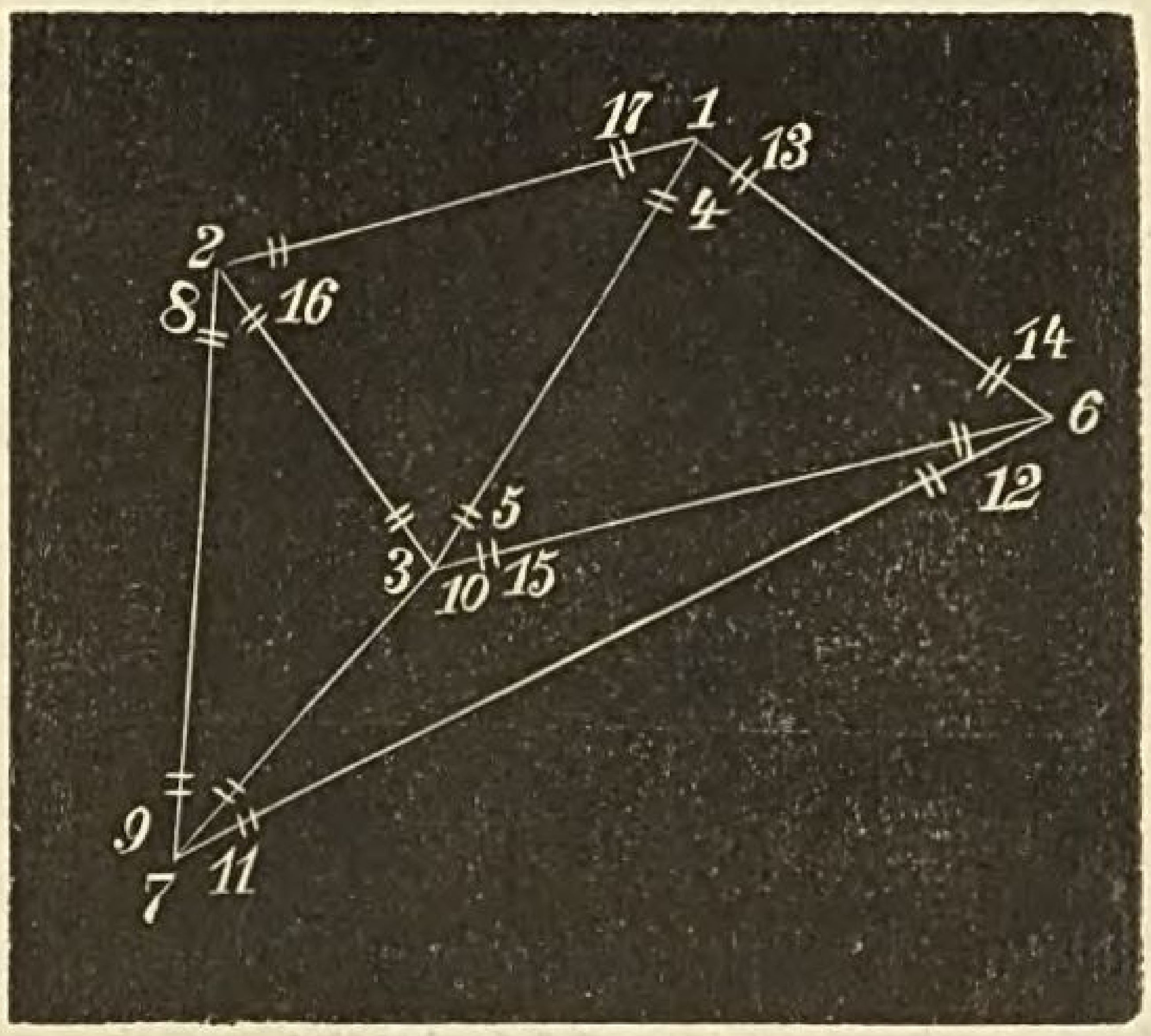
[1]) Auch in Hannover ist ein solches in dem bekannten städtischen Gehölz „Eilenriede" zwischen dem „Neuen Hause" und der „List". Ich erinnere mich aus meiner Knabenzeit, dort viel gespielt zu haben. Besonders berühmt und sehenswert ist der durch Hecken gebildete Irrgarten in Hampden Court Palace, westlich von London.

[2]) Diese Ableitung erinnert an die kürzlich aufgestellte Vermutung, daß das Wort Theodolith entstanden sei durch eine mißverstandene Auffassung des englisch gesprochenen „The Alhidade". Die Alhidade ist bekanntlich ein wichtiger Teil des Theodolithen.

wandern kann, ohne mehr als zweimal ein und dieselbe Linie zu betreten und daß man dann an den Ausgang stets zurückgelangen kann. Wir wollen zunächst eine Bemerkung über solche Punkte vorausschicken, nach denen nur eine Linie führt. Wenn man diese beschritten hat, so kehrt man am Ende um; dann hat man zwei Querstriche an der nächsten Kreuzung auf diesem Wege und nach unseren Regeln wird man diesen Weg nicht wieder betreten. Die zu beachtenden Regeln sind folgende: Man gehe beliebig weiter, bis man an eine Kreuzung kommt, die man bereits berührt hat. Dann kehre man um. Nur in dem einen Falle gehe man durch die Kreuzung hindurch, wenn man den Weg, auf dem man sich befindet, bereits vorher einmal durchlaufen hatte. Sind alle von der Kreuzung auslaufenden Wege bereits berührt, so wähle man stets einen solchen, der erst einmal durchlaufen wurde. Dann gelangt man sicher an den Ausgangspunkt zurück und wird finden, daß man jeden Weg zweimal gemacht hat.

Die Fig. 97 zeigt an einem einfachen Beispiele die Anwendung dieser Regeln. Die fünf Punkte sind durch acht Linien verbunden. Der Weg wird beliebig bei 1 begonnen. Bei 4 wird man durch die Regel zur Umkehr gezwungen, ebenso bei 8, bei 10 und bei 13. Bei 17 ist man wieder am Ausgangspunkt. Ein Blick auf die kleinen Querlinien zeigt, daß jeder Weg zweimal durchlaufen ist. Die Beachtung dieser einfachen Regeln hätte dem Theseus ermöglicht, auch ohne den Faden der Ariadne aus dem Labyrinth den Weg zurück zu finden. Der Grund, daß die Regel stets zum Ziele führt, liegt darin, daß in jeder Ecke auf alle Fälle eine gerade Anzahl von Wegen mündet, da ja jeder doppelt gedacht werden kann, weil er zweimal durchlaufen wird. So hat uns die allgemeine Lösung der Euler'schen Brückenaufgabe zugleich eine interessante Behandlung des alten Labyrinthproblems an die Hand gegeben.

Fig. 97.



9.

Dominospiel.

Das Dominospiel wird eins von den Spielen sein, die in den Klöstern des Mittelalters erlaubt waren und seinen Namen daher haben, daß derjenige, welcher zuerst seinen letzten Stein ansetzte, ein Benedicamus D o m i n o oder D o m i n o gratias ausrief. Jeder der 28 Steine trägt zwei durch schwarze Punkte gekennzeichnete Zahlen, die wir in folgender Zusammenstellung (Fig. 98) wiedergeben. Da 168 Punkte vorhanden sind, so ist der Durchschnitt

Fig. 98.

06	16	26	36	46	56	66
05	15	25	35	45	55	
04	14	24	34	44		
03	13	23	33			
02	12	22				
01	11					
00						

der Punkte jedes Steines 6. Es giebt auch Spiele, die mit Doppelsieben, Doppelacht oder Doppelneun endigen; die Steine derselben haben dann durchschnittlich 7, 8, oder 9 Punkte und ihre Anzahl beträgt $\frac{8 \times 9}{2} = 36$, $\frac{9 \times 10}{2} = 45$, $\frac{10 \times 11}{2} = 55$, allgemein $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$, die Zahl der Punkte $\frac{n(n+1)(n+2)}{2}$, also das Dreifache der Kugelzahl einer dreiseitigen Pyramide, deren Seite $= n$ ist. Steine, deren Zahlen sich zu 6 ergänzen, wie 25 und 41, heißen komplementär.

Man kann mit neun Dominosteinen magische Quadrate bilden. Nimmt man z. B. die sieben, eine Null enthaltenden, Steine und dazu 16 und 26, so hat man beistehendes Quadrat (Fig. 99) mit der Summe Zwölf. Tauscht man diese Nullsteine mit den Steinen aus, die eine Eins enthalten und nimmt statt 16 und 26 die 26 und 36, so erhält man wieder ein magisches Quadrat mit der Summe Fünfzehn. Geht man so weiter, so erhält man noch die Summen Achtzehn, Einundzwanzig und Vierundzwanzig mit denjenigen sieben Steinen, die eine Zwei, Drei und Vier enthalten und je zweien, die eine Sechs enthalten. Ersetzt man in den so erhaltenen Quadraten jeden Stein durch den ihm komplementären, so erhält man wieder neun Formen mit derselben Summe.

Fig. 99.

16	00	05
02	04	06
03	26	01

So kann man denn auch Teufelsquadrate von 16 und 25 Steinen bilden. Erstere, wenn man die ersten beiden Serien zu je sieben und dazu 25, 26 und 36, wie in beistehendem Quadrat (Fig. 100) nimmt. Man findet hier stets die Summe 18. Dieses Quadrat liefert nicht nur in den Reihen, Zeilen und Diagonalen die Summe 18, sondern auch in allen kleinen Quadraten und man kann sämmtliche Reihen und Zeilen miteinander vertauschen, ohne daß diese Eigenschaft verloren geht. Vertauscht man wieder jeden Stein mit demjenigen, dessen eine Zahl eine höhere Einheit enthält, so bekommt man andere Quadrate mit denselben Eigenschaften und der Summe Zweiundzwanzig, Sechsundzwanzig oder Dreißig. Dieselben Summen erhält man, wenn man die Quadrate mit den komplementären Steinen bildet. Fig. 101 zeigt ein noch größeres Quadrat mit 25 Steinen. Die Summe ist stets Siebenundzwanzig. Auch hier kann man wieder durch die vorhin angedeuteten Vertauschungen neue Formen hervorbringen. Legt man die Steine, deren jeder ein Rechteck darstellt, ohne Lücken aneinander, so erhält man natürlich der Form nach Rechtecke. So im letzten Falle ein Rechteck, dessen wagerechte Reihen zehn Zahlen, dessen senkrechte

Fig. 100.

26	12	13	03
14	02	36	11
05	15	01	06
00	25	04	16

Reihen dagegen fünf Zahlen enthalten. Die letzteren haben abwechselnd die Summe Dreizehn oder Vierzehn.

Das Bilden dieser magischen Quadrate (siehe Abschnitt 3) ist ein Geduldspiel für einen Einzelnen, während das eigentliche Dominospiel von zwei oder vier Spielern gespielt wird. Bei uns können beliebig viele Spieler, also beim einfachen Spiel zwei, drei oder vier Teil nehmen. Jeder erhält sechs Steine. Sobald Jemand außer Stande ist anzusetzen, muß er Steine von dem übrig gebliebenen Reste hinzunehmen, bis er ansetzen kann. Er braucht aber nicht mehr als drei Steine zu nehmen; hat er beim dritten Male noch keinen geeigneten Stein erhalten, so „paßt" er und der nächste Spieler setzt weiter an. Jeder hat stets diejenige Nummer anzusetzen, die sich am freien Ende des Spiels befindet. Bei vier Spielern, deren jeder sieben Steine erhält, kann der eigentümliche Fall eintreten, daß derjenige, welcher zuerst setzt, gewinnt, während der zweite und dritte noch gar nicht in die Lage gekommen ist, anzusetzen, dagegen der dritte seinen letzten Stein noch besitzt. Bei den unzähligen Verteilungsmöglichkeiten ist die Wahrscheinlichkeit des Vorkommens solcher Partien natürlich sehr gering. Es giebt im Ganzen 21 solcher Spiele, entsprechend der Anzahl der Kombinationen von sieben Steinen zu je zweien genommen $\left(\frac{7 \times 6}{1 \times 2}\right)$. Falls man nicht nur darauf ausgeht, seinen letzten Stein zuerst anzusetzen, sondern auch zu erreichen wünscht, daß die Gegner noch möglichst viele Punkte in der Hand haben, ist folgende Verteilung die allergünstigste unter den 21 in Frage kommenden. Der erste Spieler hat 00, 01, 02, 03, 14, 15, 16, der vierte 11, 12, 13, 04, 05, 06. Der siebente Stein dieses Spielers sowie die sämmtlichen der beiden anderen Spieler sind im übrigen beliebig. Der erste Spieler setzt nun 00; da der zweite und dritte passen, so setzt der vierte und zwar 04, 05 oder 06, worauf der erste mit 41, 51, oder 61 fortfährt. Wieder müssen die beiden nächsten Spieler passen und der vierte setzt 11, 12 oder 13, worauf der erste mit 10, 20 oder 30 fortfährt. So

Fig. 101.

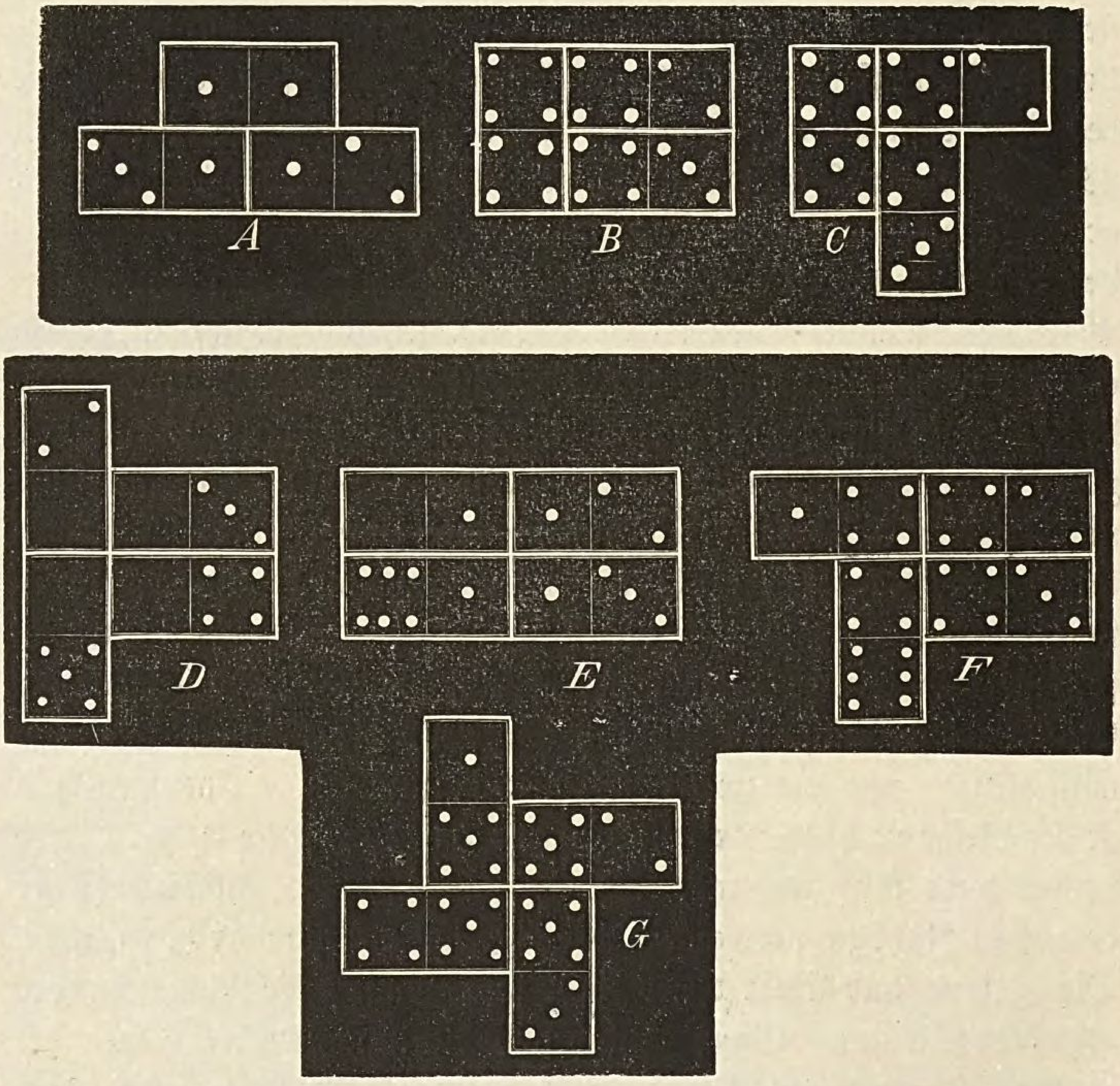
35	03	06	22	51
11	32	61	45	40
62	46	00	21	24
01	31	52	63	33
44	41	34	02	05

wird das Spiel fortgesetzt und beim siebenten Umgang ist der erste fertig. Die Gegenspieler haben noch 120 Punkte in der Hand. Das ist der günstigste unter allen Gewinnen des Dominospiels. Aehnliche Partien, wenn auch mit geringerem Gewinnerfolge, erhält man, wenn an Stelle der 0- und 1-Steine die betreffenden 2-, 3-, 4-, 5-, 6-Steine genommen werden. Durch diese Veränderung erhält man eben jene Anzahl von 21 Spielen.

Es giebt einen niedlichen Scherz, der sich mit dem „Domino" ausführen läßt. Dieser findet sich in „Die Wunder der Arithmetik oder: die interessantesten und wunderbarsten Zahlengeheimnisse, bestehend in der reichhaltigsten Sammlung der vorzüglichsten Rechnenkünste, Vexiraufgaben, Rechnenmaschinen, Universal-Rechnentafeln, des Rechnenstabes u. dgl. m. Ferner: die Kunst, das Alter, den Wunsch und den Taufnamen der Personen zu erraten. Nebst einem arithmetisch-kabbalistischen Wahrsager. Von Ign. Bernh. Montag, Lehrer der Arithmetik u.s.w. Zwei Teile. Leipzig. Verlag von Stoll." Man kann nämlich einen Stein, den sich jemand gedacht hat, durch eine einzige Angabe erraten. Dies ist deshalb auffallend, weil doch jeder Stein zwei Zahlen enthält, deren Erraten eigentlich zwei Angaben erforderlich machen müßte. Es ist eben eine jener unbestimmten Gleichungsformen, die nur eine einzige Lösung zulassen und zwar in jedem beliebigen, nicht nur im dezimalen Zahlensystem. Seien x und y die beiden Nummern des gedachten Steines, so läßt man die erste Zahl verdoppeln, dann eine beliebige von Einem selbst bestimmte Zahl a zuzählen, die Summe mit fünf multipliziren und die zweite Nummer hinzuzählen. Das Ergebnis ist der Reihe nach $2x$, $2x + a$, $10x + 5a$, $10x + 5a + y$. Dieses letztere wird mir genannt, worauf man nur das Fünffache jener beliebigen Zahl zu subtrahiren braucht, um die Antwort zu erhalten. Die Zehner und Einer dieser Zahl sind nämlich die Nummern des gedachten Steines. Ganz ähnlich sind die Aufgaben, bei denen der Geburtstag oder das Alter einer Person erraten wird. Im ersten Falle sind die beiden Unbekannten der Tag und der Monat. Man läßt die Tageszahl des Monats mit Zwei multipliziren, dann etwa 5 hinzuzählen, die Summe mit 5 multipliziren und die Nummer des Monats hinzuzählen. Man erhält der Reihe nach $2x$, $2x + 5$, $10x + 25$, $10x + 25 + y$. Dann subtrahirt man von dem ge-

nannten Ergebnis 25, worauf die Zähler und Hunderter den Tag, die Einer den Monat als Lösung angeben. Nur wenn am Ende eine 1 oder 2 steht, kann statt des Januar oder Februar auch November oder Dezember gemeint sein. Im letzteren Falle ist die vor den Einern stehende Ziffer um Eins zu vermindern, ebenso auch, wenn eine 0 am Ende steht, die stets auf Oktober schließen läßt. Sucht man hingegen das Alter einer Person, so sind Monat und Alter in Jahren die beiden Unbekannten. Man kann bei

Fig. 102.

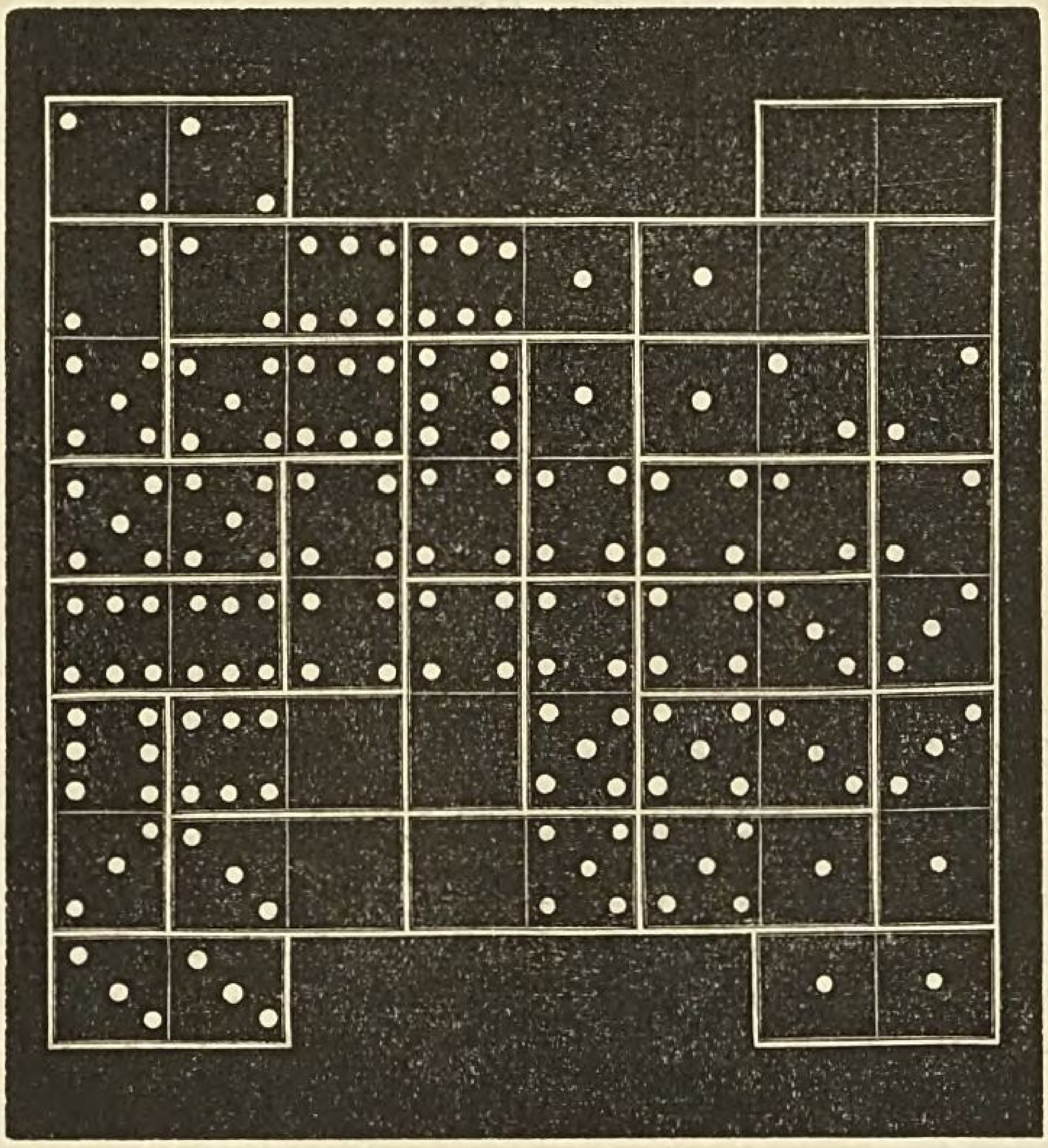


Wiederholungen das im Stillen geübte Verfahren durch kleine Veränderungen verschleiern. In unserem Falle lasse man beispielsweise die Monatszahl verdoppeln, dann um 6 vermehren, die Summe mit 50 multipliziren, darauf das Alter hinzuzählen und 365 Tage abziehen. Das Ergebnis ist $10x + 300 + y - 365$. Diese Zahl

wird genannt und man addirt im Stillen 65 hinzu. Dann geben die Hunderte den Monat, die Zehner und Einer das Alter an. Wir versagen es uns, bestimmte Beispiele auszuführen, da jeder leicht die Probe auf die Richtigkeit wird machen können.

Noch ein anderer netter Dominoscherz soll kurz erwähnt werden. Man entnehme heimlich dem Dominospiel einen beliebigen Stein, z. B. 35. Wenn man dann mit den übrigen Steinen, unter Beobachtung der Spielregel, eine Linie bildet, so bleibt schließlich an den Enden eine Drei und eine Fünf. Um die Aufmerksamkeit abzulenken, kann man sich verschiedener Mittel bedienen. Man legt z. B. die 27 übrigen Steine verdeckt und läßt einen beliebigen ziehen, mit dem begonnen werden muß. Die Zuschauer lenken dann ihre Auf-

Fig. 103.

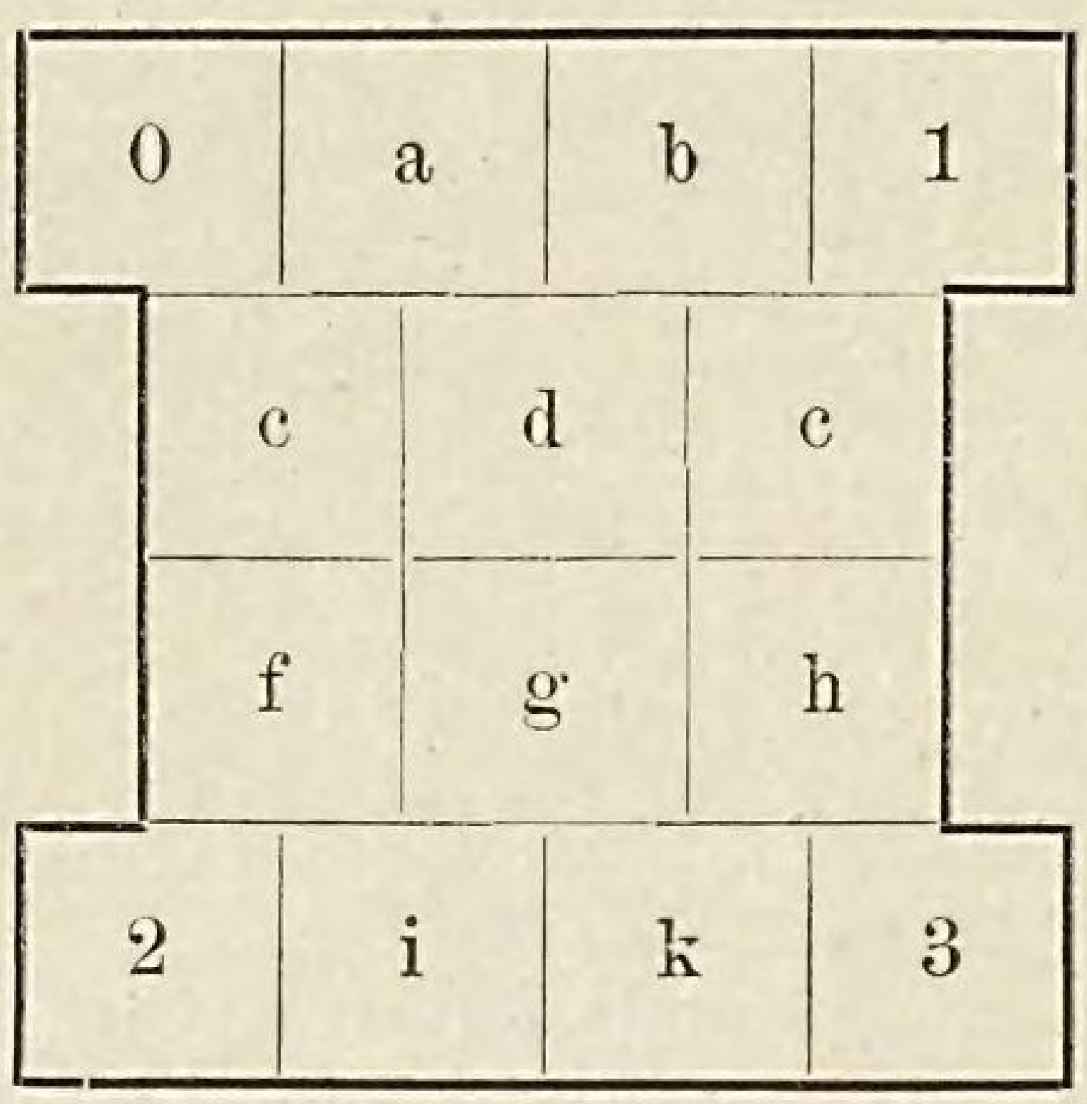


merksamkeit auf diesen ersten Stein, der doch für das Ergebnis ganz gleichgültig ist.

Ein mit Dominosteinen vielfach geübtes Legespiel sind die sogenannten Quadrillen, bei denen alle Zahlen und die Null zu vieren je ein Quadrat bilden müssen. Um irgend eine Nummer, z. B. die mit 1 in einem Quadrat zu haben, so daß sie also viermal darin vorkommt, hat man entweder 3 oder 4 Steine nötig, wobei wieder

noch verschiedene Lagen möglich sind. In Fig. 102 sind die sieben Typen dargestellt. Es ist klar, daß der Typus C allein in den Ecken vorkommen darf. Es muß also ein Paschstein in jeder Ecke liegen, wenn man die gebräuchliche Form der Quadrillen, welche Fig. 103 zeigt, erhalten will. Wir wollen ferner zunächst in die vier Ecken die Paschsteine 0, 1, 2 und 3 setzen und wenn man deren Quadrat nach dem Typus C bildet, so ist durch die überstehenden der Abschluß des Umfanges in gewisser Weise bereits bedingt, da die Nummern der beiden Zwischenquadrate an jeder Seite bereits festliegen. Es bleiben dann noch die beiden mittleren Quadrate, die in unserer Figur beide durch eine Vier besetzt sind: auch diese Nummern sind bereits durch überstehende Steinhälften fixirt. Wir können nun das in Fig. 104 angegebene Schema für

Fig. 104.



alle Quadrillen zu Grunde legen und erhalten so nach unserem Schema 34 Lösungen, die wir in aller Kürze so wiedergeben wollen:

0—2—3—1	0—2—4—1	0—2—4—1	0—2—4—1	0—2—4—1
1—4—5	1—3—5	1—5—6	1—5—6	3—5—0
6—4—0	6—4—0	3—4—0	3—5—0	1—5—6
2—5—6—3	2—5—6—3	2—6—5—3	2—6—4—3	2—6—4—3
I.	II.	III.	IV.	V.
0—4—5—1	0—4—5—1	0—4—5—1	0—2—3—1	0—2—3—1
1—3—2	1—6—2	1—6—2	4—5—0	4—5—4
6—5—0	3—5—0	3—6—2	6—5—6	6—5—6
2—4—6—3	2—4—6—3	2—4—5—3	2—1—4—3	2—1—0—3
VI.	VII.	VIII.	IX.	X.
0—3—2—1	0—3—4—1	0—2—3—1	0—2—3—1	0—2—4—1
4—5—0	5—6—0	1—4—5	1—4—5	1—3—5
6—5—6	4—6—2	6—4—0	6—4—0	6—4—6
2—4—1—3	2—5—1—3	2—5—6—3	2—5—0—3	2—5—6—3
XI.	XII.	XIII.	XIV.	XV.

0—2—4—1	0—3—2—1	0—3—4—1	0—3—4—1	0—4—2—1
1—3—5	4—5—0	5—6—0	5—6—0	5—3—0
6—4—0	6—5—6	4—5—2	4—6—2	6—4—6
2—5—0—3	2—4—1—3	2—6—1—3	2—5—1—4	2—5—1—3
XVI.	XVII.	XVIII.	XIX.	XX.
0—4—3—1	0—4—5—1	0—4—5—1	0—4—5—1	0—4—5—1
1—5—2	1—3—2	3—6—0	3—6—0	6—3—0
6—5—0	6—5—0	5—4—2	5—6—2	5—4—2
2—4—6—3	2—4—6—3	2—6—1—3	2—4—1—3	2—6—1—3
XXI.	XXII.	XXIII.	XXIV.	XXV.
0—4—5—1	0—3—4—1	0—3—4—1	0—4—3—1	0—4—3—1
6—3—0	5—6—0	5—6—5	5—6—0	5—6—5
5—6—2	4—5—2	4—0—2	4—1—2	4—1—2
2—4—1—3	2—6—1—3	2—6—1—3	2—6—5—3	2—6—0—3
XXVI.	XXVII.	XXVIII.	XXIX.	XXX.

0—4—5—1	0—4—5—1	0—4—5—1	0—4—5—1
6—3—0	6—3—0	6—3—6	6—3—6
4—1—2	5—6—2	4—1—2	5—0—2
2—5—6—3	2—4—1—3	3—5—0—3	2—4—1—3
XXXI.	XXXII.	XXXIII.	XXXIV.

Nun kann man aber in jeder dieser 34 Lösungen irgend zwei Nummern miteinander vertauschen, z. B. 0 mit 1, 1 mit 2, 4 mit 6, und so fort in ganz beliebiger Ordnung und Zahl. Jede Lösung giebt also so viele Quadrillen, als es Arten giebt sieben Gegenstände 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 auf verschiedene Weise zu ordnen, d. h. $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 = 5040$. Man erhält somit sämmtliche möglichen Anordnungen dieser Quadrillenform, wenn man 34×5040 nimmt. Dies ergiebt 342 700.

Selbstverständlich giebt es noch andere Quadrillenformen; so giebt z. B. die Anordnung Fig. 105a 50 400 verschiedene Lösungen.

Fig. 105a.	Fig. 105b.
0—1—2—4—1	4—5—6
5—3—0—6	0—3—4—1
2—6—5—4—3	6—1—2
	2—5—0—3

Dagegen hat die Form Fig. 105b nur 5040 Lösungen, also nur diese eine Grundform, während die vorige noch neun andere Grundformen besaß. Wir überlassen dem Leser, sie zu bilden und verlassen hiermit diesen Gegenstand.

Die Zahl der Lösungen des Dominospiels ist zuerst im Jahre 1859 von D. Reiß gegeben, der auch bekanntlich das Nonnenspiel mathematisch

behandelt hat. Veröffentlicht ist die auf das Dominospiel bezügliche Lösung dieses deutschen Mathematikers erst 1871 in den Mailänder Mathematischen Annalen. Die Zahl der Arten, jene Steine nach der bekannten Vorschrift in Linie aufzustellen ist

$$2^{13} \times 3^8 \times 5 \times 7 \times 4321 = 7\,959\,229\,931\,520,$$

wenn man die Lösungen von links nach rechts und die von rechts nach links getrennt zählt. Der französische Mathematiker Laisant hat zuerst darauf aufmerksam gemacht, daß das Siebeneck mit seinen Diagonalen die sämmtlichen Lösungen eines Dominospiels darstellt, wenn man die Steine mit gleichen Zahlen ausscheidet und das Spiel mit den übrig bleibenden 21 Steinen so gespielt denkt, daß die Steine im Kreise liegen, so daß der letzte wieder an den ersten paßt. Die sieben Ecken enthalten ja nur paarige[1]) Bezirke und es kann daher die vollständige Figur in einem Zuge gezeichnet werden. Der Weg von 1 nach 6 bedeutet das Anlegen desjenigen Steines, der diese Zahlen enthält u. s. f. Man darf natürlich nur auf den Seiten und ungebrochenen Diagonalen wandern. Hat man nun die Anzahl der Möglichkeiten festgestellt, das Siebeneck mit seinen Diagonalen, welches ja aus $\frac{7 \times 6}{1 \times 2} = 21$ Linien besteht, zu zeichnen, so hat man zu erwägen, welche Vermehrung die Einschiebung der sieben Paschsteine hervorbringt. Nun kann aber jeder dieser sieben Steine in einer Kreislösung an drei verschiedenen Stellen eingeschoben werden. Daher giebt es, weil gleichzeitig alle sieben eingeschoben werden sollen, $3^7 = 2187$ mal so viel Lösungen, als ohne dieselben. Das nun erhaltene Ergebnis ist noch mit 28 zu multipliziren, wenn man die Anzahl der geradlinigen an Stelle der geschlossenen Lösungen haben will, weil man bei jedem der 28 Steine beginnen kann.

Es ist durch weit allgemeinere Betrachtungen möglich geworden, Methoden zu finden, um die Anzahl aller möglichen Arten zu finden, auf welche sich ein Vieleck mit seinen Diagonalen in einem Zuge darstellen läßt. Ein Vieleck mit ungerader Seitenzahl hat stets nur paarige Bereiche und so hat man denn aus Betrachtung des regulären

---

[1]) Dieser Ausdruck bezieht sich auf die Auseianderſetzungen, welche sich in den Abschnitten „Brückenspiel" und „Labyrinth" finden.

Neunecks mit seinen Diagonalen $\left(\frac{9 \times 8}{1 \times 2} = 36 \text{ Verbindungslinien}\right)$ ermittelt, wie viel Lösungen das Dominospiel giebt, welches bis zur Doppelacht geht. Dieses würde also aus 36 Steinen, die den Verbindungslinien entsprechen, und 9 Paschsteinen, also 45 im Ganzen, bestehen. Die Anzahl hat die erstaunliche Höhe von

$$2^{16} \times 3^{11} \times 5^2 \times 711 \times 40\,787 = 911\,520\,057\,021\,235\,200.$$

Es mag hier eine Bemerkung über das beliebte Skatspiel eingeschaltet werden, um einen Vergleich über die Wahrscheinlichkeit zu ermöglichen, nach welcher ein und dieselbe Karten- oder Stein-Kombination bei Skat und Domino wiederkehrt. Der Skat wird mit 32 Karten gespielt, von denen 2 den sogenannten Skat bilden, während die übrigen 30 gleichmäßig an drei Spieler verteilt werden. Es giebt demnach $16 \times 32 = 496$ verschiedene Skate (zu je 2 Karten). Da die Vorhand zuerst die Karten bekommt, so hat sie für ihre Karten eine Auswahl von

$$\frac{30 \times 29 \times 28 \times 27 \times 26 \times 25 \times 24 \times 23 \times 22 \times 21}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10}$$
$$= 30\,045\,675 \text{ Möglichkeiten,}$$

dagegen die Mittel- und Hinterhand nur noch

$$\frac{20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16 \times 15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10}$$
$$= 184\,756 \text{ Anordnungen.}$$

Da nun jede der letzteren mit jeder der ersteren und diese wieder mit jedem Skat verbunden sein können, so stellt das Produkt 1 376 645 304 252 320 die Zahl aller möglichen Spiele dar. Nehmen wir an, von flotten Skatspielern würden 20 Spiele in einer Stunde gespielt, so ergiebt das eine Gesammtdauer von 7850 Millionen Jahren, wenn die Spieler beabsichtigen sollten, alle möglichen Spiele durchzuspielen. Man ersieht daraus, daß allerdings die Anzahl der Spiele beim Skat noch etwa 180 mal größer ist, als beim gewöhnlichen Domino, daß dagegen das Dominospiel bis zur Doppelacht (45 Steine) bereits etwa 800 mal so viel Spiele gestattet, als das Skatspiel.

Wir haben vorhin zwar angedeutet, daß man die Anzahl aller

Möglichkeiten berechnen müsse, nach denen ein Vieleck mit seinen Diagonalen in einem Zuge gezeichnet werden kann, ohne jedoch die Zahl derselben nach diesem Verfahren wirklich zu bestimmen. Der französische Mathematiker Fleury hat 1885 in dem „Journal de Mathématiques élémentaires“ eine höchst interessante Methode angegeben, um diese Zahl zu finden. Ehe wir dieselbe entwickeln, wollen wir zunächst erwähnen, daß Reiß auf anderem Wege das Produkt $2^{13} \times 3^8 \times 5 \times 7 \times 4231$ als Anzahl aller möglichen linearen Spiele des gewöhnlichen Domino gefunden hatte. Das Problem des Siebenecks ergab dann, daß man die gesuchte Zahl sämmtlicher Möglichkeiten, jene Figur in einem Zuge zu zeichnen, wegen der noch nicht berücksichtigten Paschsteine mit 3^7 und wegen der Ausziehung der geschlossenen Figur in eine gerade Linie mit $2^2 \times 7$ zu multipliziren habe. Daraus ergiebt sich durch Vergleichung jene gesuchte Anzahl, um die es sich handelt

$$= 2^{11} \times 3 \times 5 \times 4231 = 129\,976\,320.$$

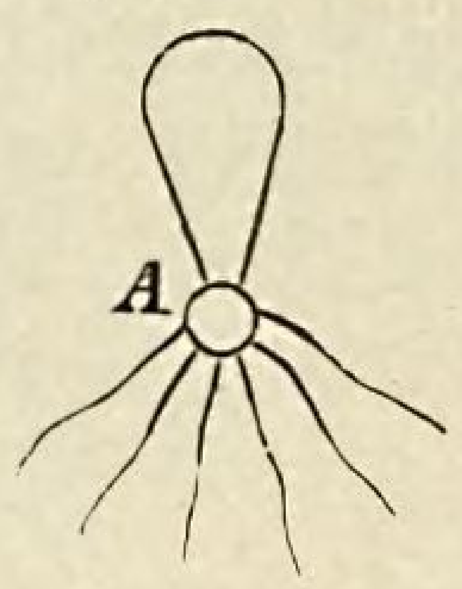
Nun wendet, wie gesagt, Fleury eine eigenartige generelle Methode an, um diese Zahl zu finden. Er führt nämlich nach einander die in Frage stehenden Vielecke auf solche mit geringerer Seitenanzahl zurück. Hierbei können aber auch Wege entstehen, die ohne andere Ecken berührt zu haben, wieder zu derselben Ecke zurückführen, von welcher sie ausgegangen waren. Solche Wege wollen wir füglich Sackgassen nennen und Lucas hat die Methode durch ein Mittel ergänzt, sich auch etwaiger Sackgassen zu entledigen. Da die Methode ebenso schwierig, wie interessant ist, so müssen wir zu ihrer Erklärung ein wenig weiter ausholen.

Euler hat in der berühmten Aufgabe von den sieben Brücken Königsbergs über den Pregel (Abschnitt 7) folgenden Satz bewiesen: Jedes zusammenhängende Netz von Linien, welches nur paarige Ecken enthält, kann in einem geschlossenen Zuge ohne Ueberschlagung und Wiederholung gezeichnet werden. In der Labyrinthaufgabe (Abschnitt 8) erhielten wir ferner den Satz: Jedes zusammenhängende Netz kann unter Beobachtung gewisser Vorschriften in einem einzigen Zuge gezeichnet werden, wenn man jede Linie des Netzes zweimal passirt. Diese Regeln ergänzen wir noch durch folgenden von Clausen formulirten Satz: „Jedes zusammenhängende Netz zwischen unpaarigen Bezirken, welche aber ihrerseits in gerader Anzahl

vorhanden sind, kann in halb so viel Zügen gezeichnet werden, als Ecken oder Bezirke vorhanden sind."

Nun wollen wir einige Bewegungen durch Sackgassen in Beispielen erläutern. In den Bezirk A münden 6 Wege und außerdem eine Sackgasse. Jedesmal, wenn man das zugehörige Labyrinth in einem Zuge durchläuft, wird man demnach dreimal den Punkt A passiren und bei jedem dieser Wege kann man die Sackgasse in einem der beiden Sinne durchlaufen. So oft man demnach eine Sackgasse bildet, muß man die Zahl der vollständigen Umläufe des Labyrinths mit der Hälfte der übrigen in diesen Bezirk mündenden Wege multipliziren; in unserem Falle (Fig. 106) wird ihre Zahl durch das Hinzukommen der Sackgasse verdreifacht.

Fig. 106.



Hat man nun einen Bezirk, in welchen nur Sackgassen münden, so kann man das eben gefundene Ergebnis anwenden, um die Zahl der möglichen Wege zu ermitteln. In Fig. 107 sind beispielsweise $2 \times 4 \times 6 = 48$ verschiedene Umläufe möglich und wenn wir dem doppelten Sinne jedes Umlaufs Rechnung tragen, 96. Allgemein: Zählt man jede in einen Bezirk einmündende Sackgasse doppelt, den beiden Mündungen entsprechend, so ist die Zahl der Umläufe gleich dem doppelten Produkt aller geraden Zahlen, die kleiner sind, als die Zahl der Wege. Gehen z. B. von einem Punkte sechs Sackgassen aus, so ist jene Anzahl $= 2 \times 10 \times 8 \times 6 \times 4 \times 2 = 7680$. Die Fig. 108 stellt eine Eisenbahn mit doppeltem Geleise und sieben Stationen (A, B, C, D, E, F, G) dar. Wie viele vollständige Umläufe kann nun ein Zug darauf machen? Man unterdrückt nacheinander sämmtliche Sackgassen A, B u. s. f. Dadurch halbirt man jedesmal die Zahl der möglichen Umläufe, so daß man schließlich erhält $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64$. Die Zahl der zwischen den Stationen liegenden Strecken giebt an, wie oft die Zwei mit sich

Fig. 107.

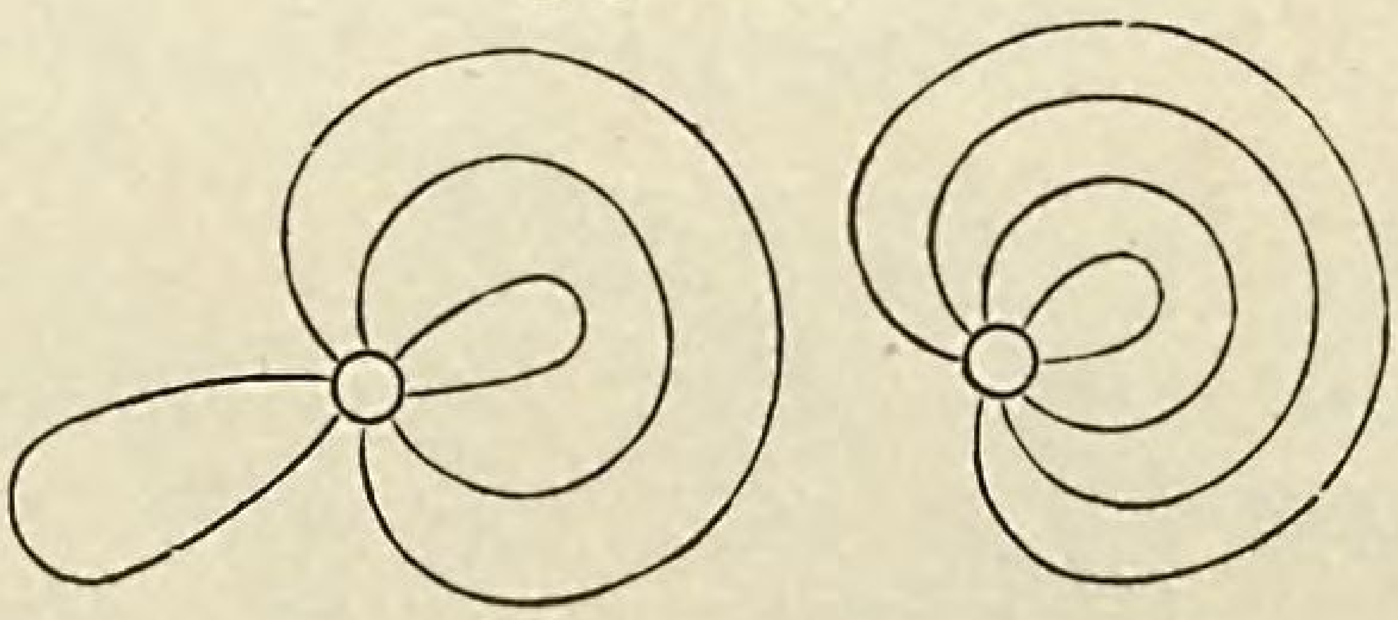
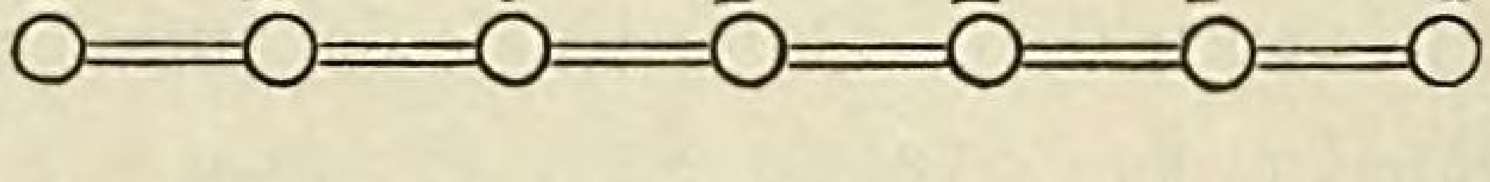


Fig. 108.



selbst multiplizirt werden muß, um sämmtliche Umläufe zu erhalten. Ist die vorhin betrachtete Bahn eine Ringbahn, so wird sie durch ein reguläres Sechseck dargestellt. Die Zahl der Umläufe ist dann noch 7 mal so groß als vorhin, also 448, allgemein für n Zwischenräume $(n + 1) \times 2^n$ Umläufe.

Nachdem wir dieses vorausgeschickt haben, wollen wir die von Tarry und Lucas gefundenen Sätze an einem Beispiele erläutern. Figur 109 stellt ein reguläres Fünfeck mit seinen Diagonalen dar, und versinnbildlicht in der früher geschilderten Art ein Dominospiel mit zehn Steinen und fünf Paschen, also bis zur Doppelvier. Man verbinde nun die vier von Null ausgehenden Wege zu Doppel-

Fig. 109.

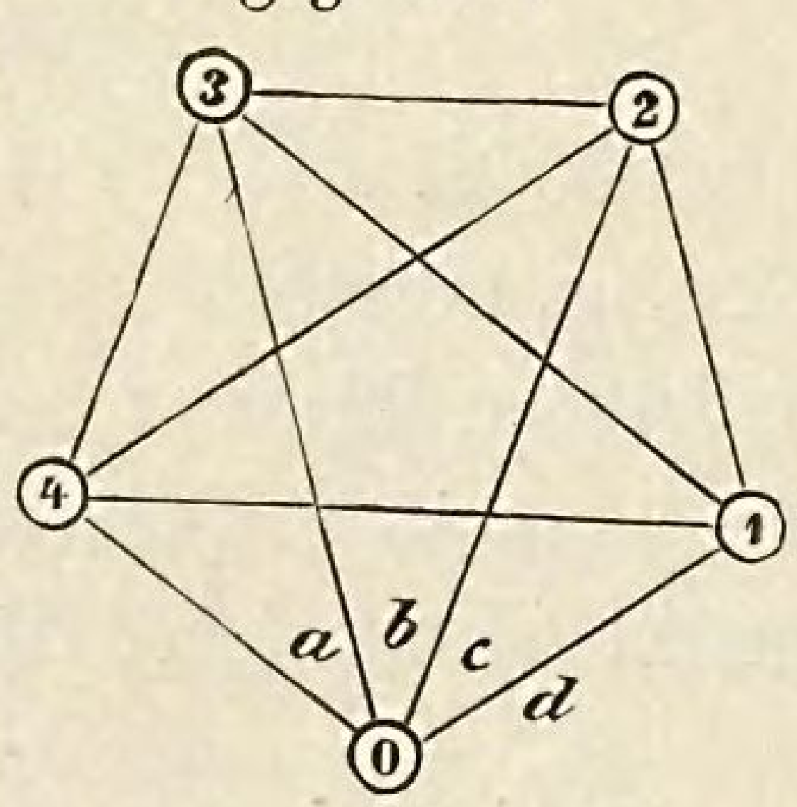


Fig. 110.

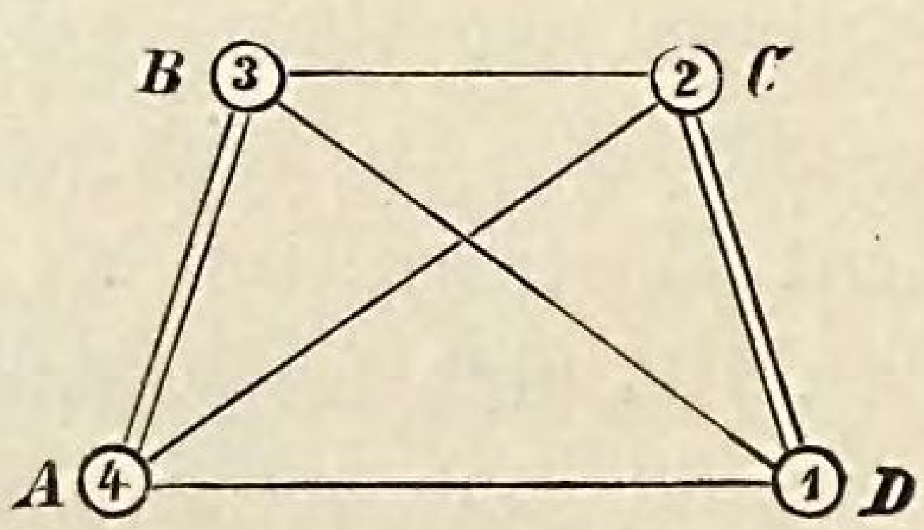


Fig. 111.

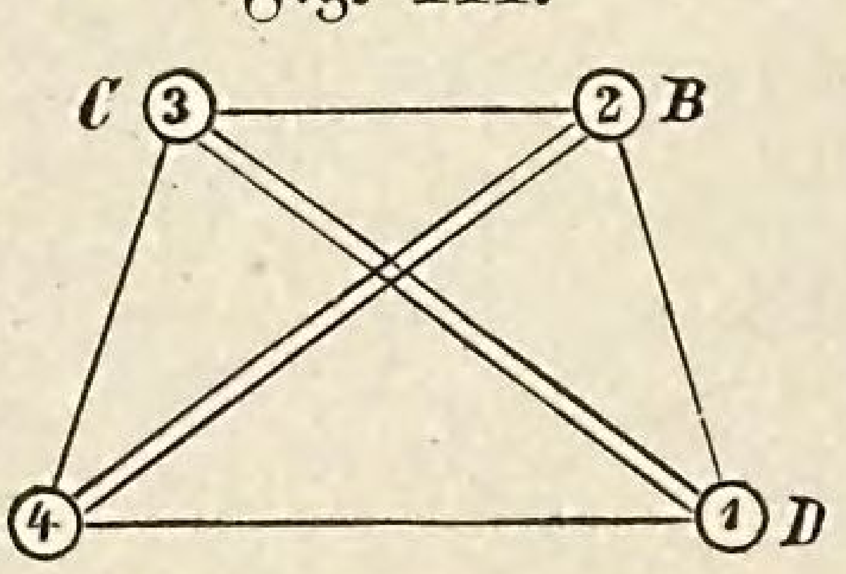
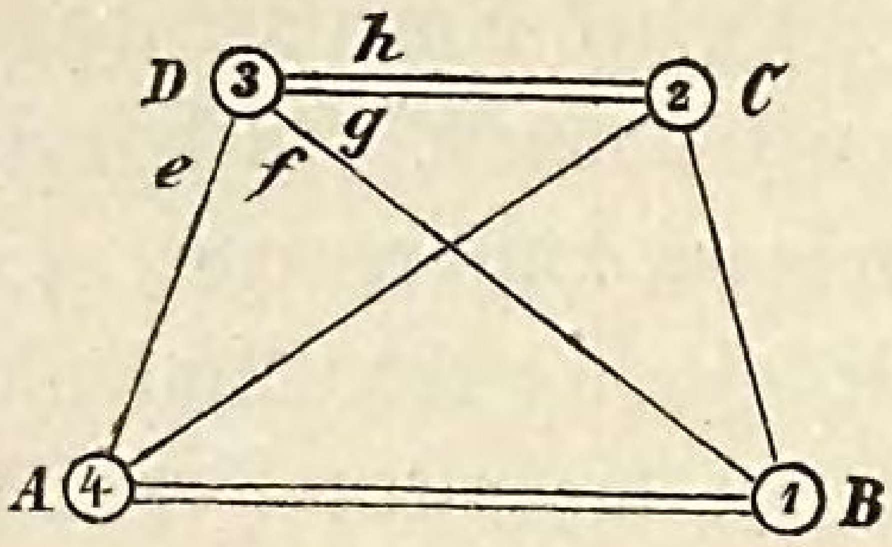


Fig. 112.



paaren und bringe so den Punkt 0 zum Verschwinden. Vereinigt man ab einerseits und cd andererseits, so erhält man Fig. 110, ebenso Fig. 111, wenn man die Paare ac und bd und Fig. 112, wenn man die Paare ad und bc nimmt. Die neuen Figuren stellen drei gleichschenklige Trapeze dar, bei deren ersten die Schenkel, bei deren zweiten die Diagonalen und bei deren dritten die Grundlinien doppelt zu rechnen sind. Dann ist die Summe der im Fünfeck möglichen Umläufe gleich der Summe der Umläufe in diesen drei Trapezen. Da diese aber völlig gleichwertig sind in Bezug auf die Zahl der möglichen Umläufe, so ergiebt die dreifache Anzahl der Umläufe für eines der Trapeze die Zahl der Umläufe im Fünfeck. Setzen wir das Verfahren nun in derselben Weise mit

dem Trapez Fig. 112 fort. Vom Punkt D gehen vier Wege aus: e, f, g, h. Die Zusammenstellung der Paare ef und gh giebt die Fig. 113a mit der durch gh gebildeten Sackgasse; eg mit fh oder, was natürlich dasselbe ist, da g und h ja bereits parallel

Fig. 113a.

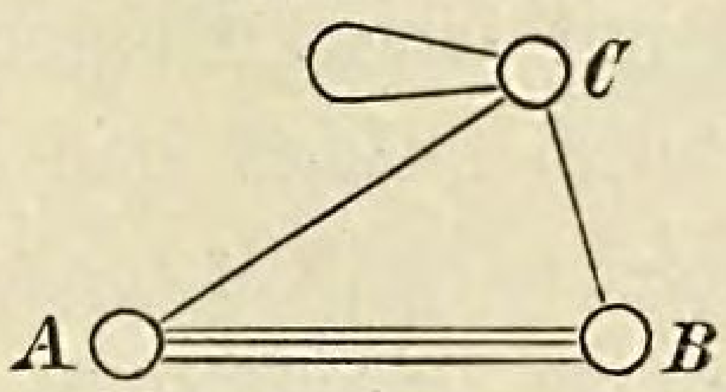


Fig. 113b.



laufen, eh mit fg giebt Fig. 114a oder, wenn man will, Fig. 114b mit zwei Sackgassen. Diese Form giebt aber, wie sich leicht berechnen läßt, $2 \times 1 \times 2 \times 3 = 12$ Umläufe. Die Fig. 113 liefert

Fig. 114a.

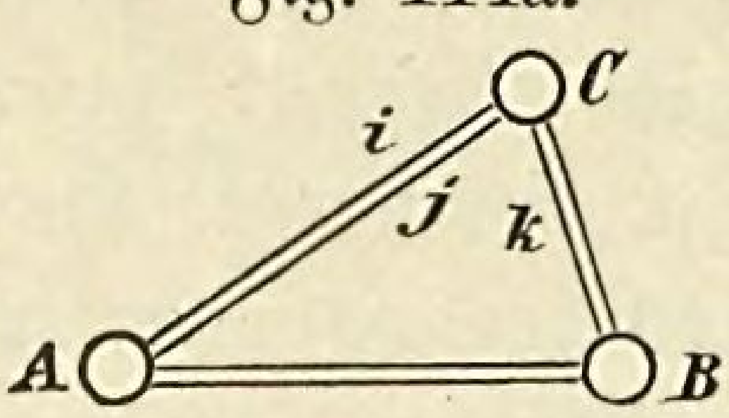
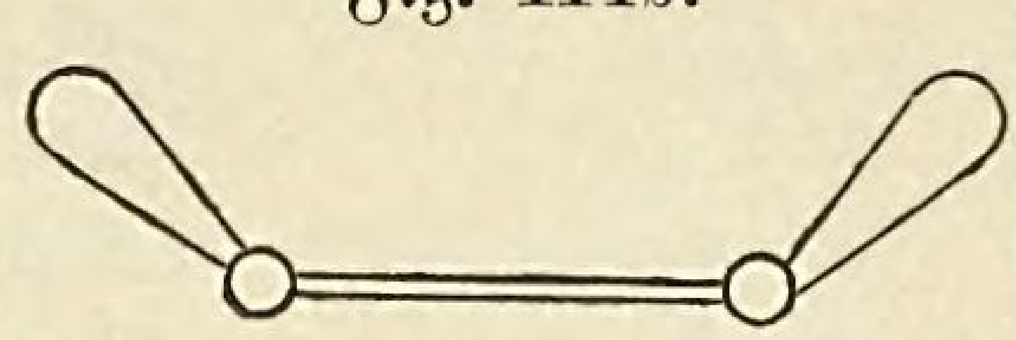


Fig. 114b.



durch weitere Unterdrückung drei Formen, zweimal die Figur 114b mit je zwölf Umläufen und einmal die Figur 113b mit acht Umläufen, im Ganzen giebt das Trapez $2 \times (12 + 8 + 24) = 88$ Umläufe und daher das Fünfeck 264 Umläufe.

Nach derselben Methode findet man die Anzahl aller Umläufe auf den zwölf Kanten eines Oktaeders: 744 Umläufe. Wir werden an anderer Stelle Gelegenheit haben, ein Spiel zu behandeln, welches darin besteht, die Kanten oder Ecken eines Ikosaeders und Dodekaeders (in dem Abschnitt „Reisespiele") in einem Zuge zu durchwandern und können dann auch dieselbe Methode anwenden, um die Zahl der Lösungen zu finden. Für eine doppelgleisige Ringeisenbahn findet man, wenn n die Zahl der Stationen und R_n die Zahl der zugehörigen Umläufe ist, durch allmähliche Unterdrückung von Stationen nach der oben geschilderten Methode

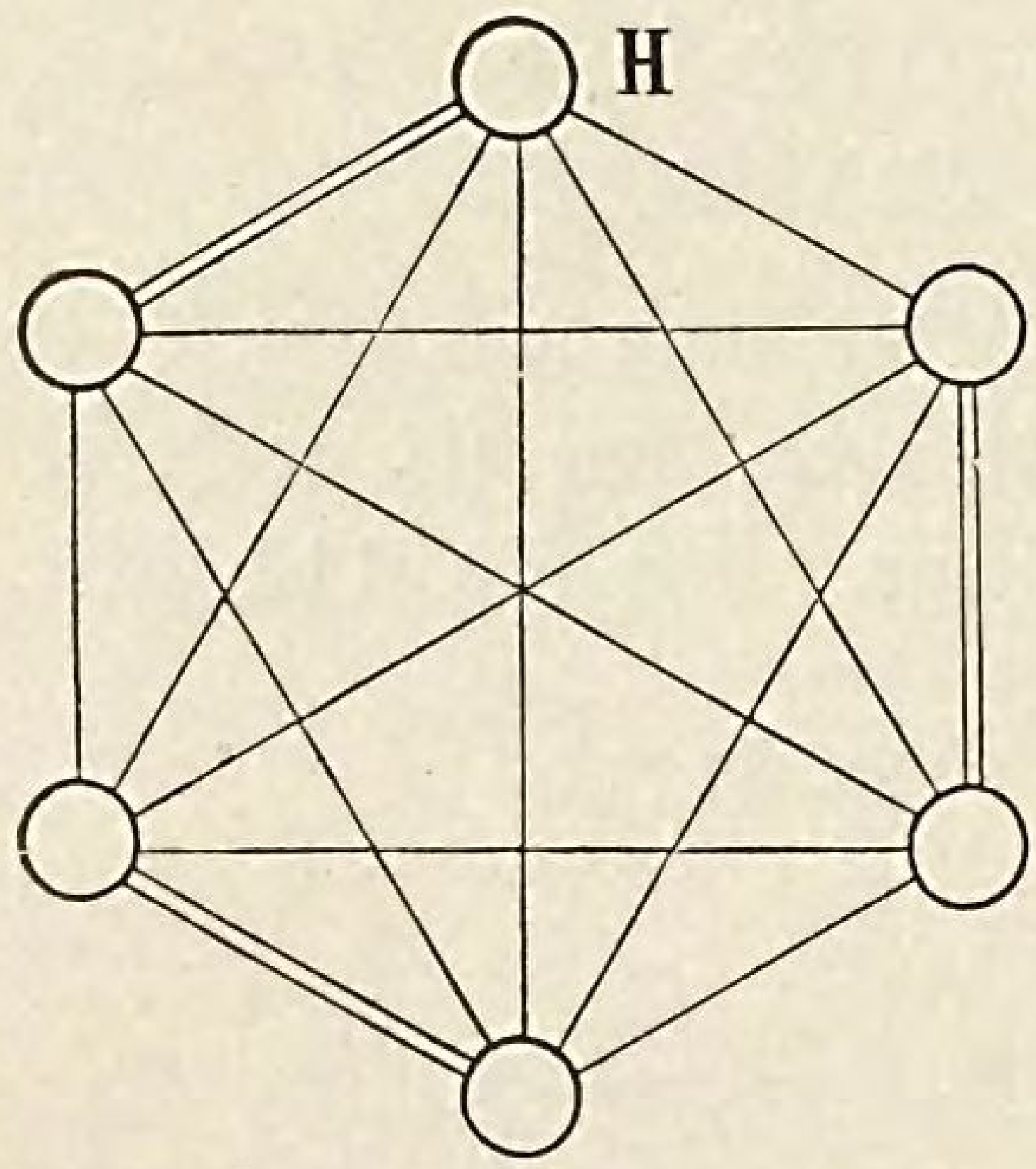
$$\frac{R_n}{2^n} = \frac{R_{n-1}}{2^{n-1}} + 1 \text{ und } \frac{R_2}{2^2} = 3$$

(also $R_2 = 12$, was schon oben benutzt wurde).

Darnach erhält man $R_3 = 2^3(3 + 1) = 32$, $R_4 = 2^4(4 + 1)$, allgemein, wie schon oben bemerkt wurde, $R_n = (n + 1)\, 2^n$, da stets $\frac{R_n}{2^n} = n + 1$ ist.

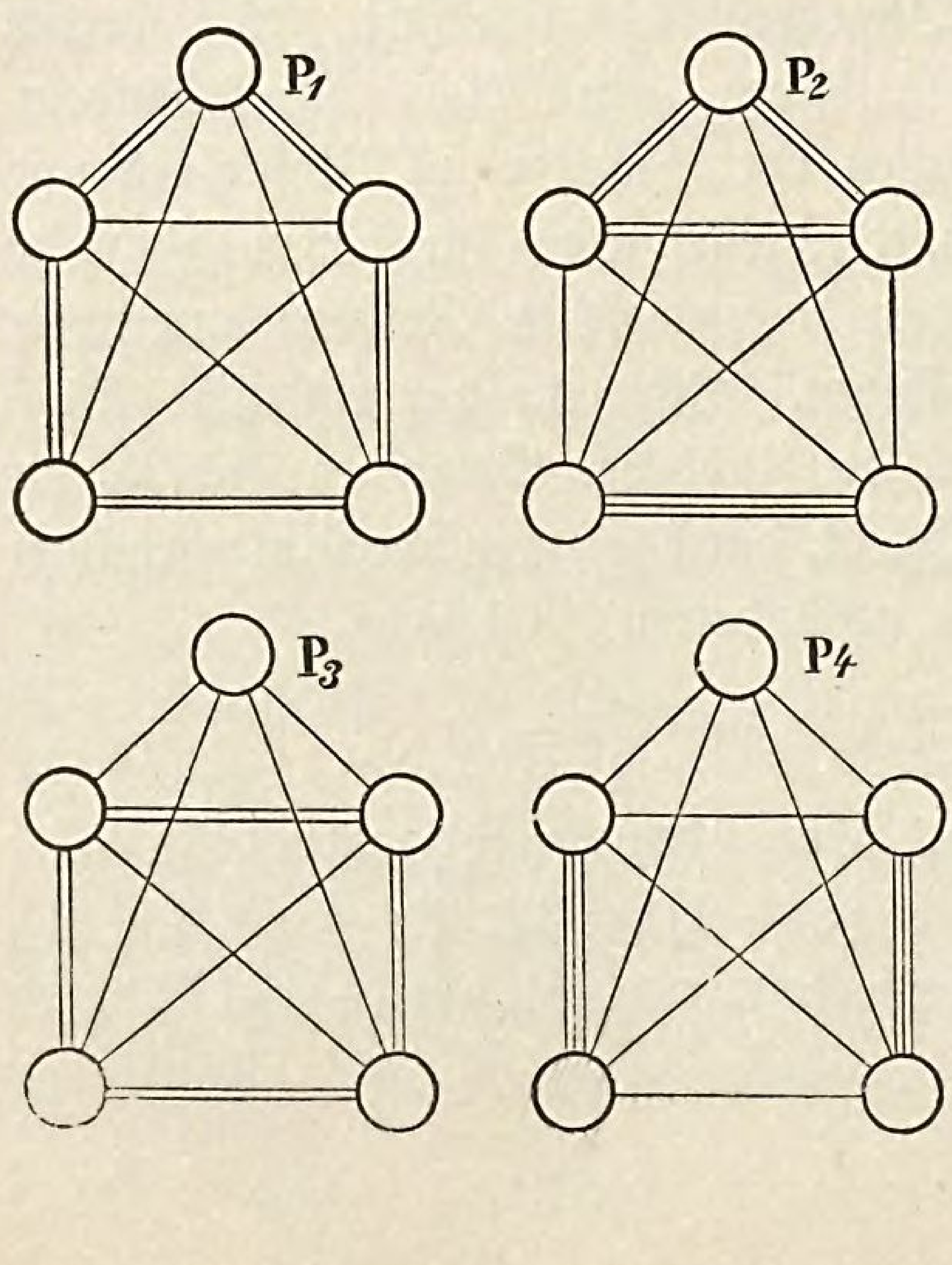
Da wir vom Dominospiel ausgehend zu der Frage angeregt waren, wie oft eine Figur, die sich überhaupt in einem Zuge zeichnen läßt, auf verschiedenen Wegen durchlaufen werden kann, wird es nun, da wir die Methode und das Gesetz an einem einfachen Beispiel erläutert haben, nicht schwer sein, sie auch auf jenes Siebeneck mit seinen Diagonalen anzuwenden, durch welches das gewöhnliche Dominospiel dargestellt wird, wenn man vorläufig die Paschsteine ausscheidet.

Fig. 115.



Zunächst erhalten wir an Stelle des Siebenecks das in Fig. 115 gezeichnete Sechseck durch Unterdrückung der siebenten Ecke. Die Seiten sind jetzt abwechselnd doppelt zu rechnen. Während man nun vorher beim Fünfeck drei Paar Kombinationen je zweier Wege machen konnte, weil nur vier Wege in den Ecken mündeten, kann man hier die sechs von einer Ecke ausgehenden Linien fünfzehn mal in derselben Weise kombiniren und es ist daher nach dem Satze über die Unterdrückung der Bezirke die Zahl der Umläufe im Siebeneck fünfzehn mal so groß, als die Zahl der Umläufe in dem nun erhaltenen Sechseck.

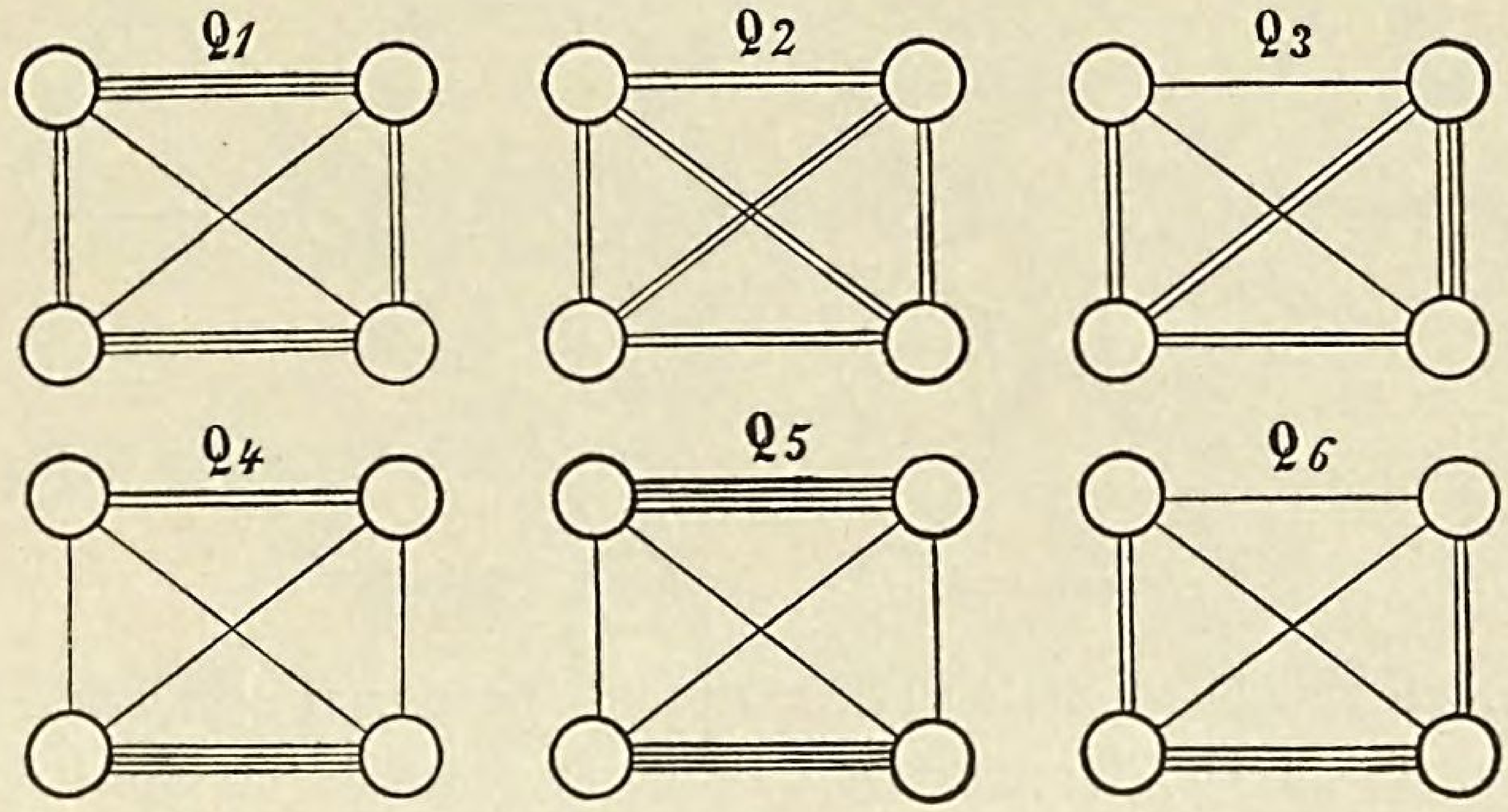
Fig. 116.



Fährt man so fort und unterdrückt eine Ecke dieses Sechsecks, so erhält man vier verschiedene Fünfecke: P_1, P_2, P_3, P_4 (Fig. 116). In P_1 sind die sämmtlichen Seiten doppelt und es kann achtmal erhalten werden. In P_2 ist eine Seite dreifach, zwei sind doppelt und ebenso eine Diagonale: es kann viermal erhalten werden. Das dritte,

P_3, welches drei doppelte Seiten und eine solche Diagonale hat, ist wieder achtmal zu rechnen, während das letzte mit zwei dreifachen Seiten viermal erhalten wird. Demnach ist die Zahl

Fig. 117.



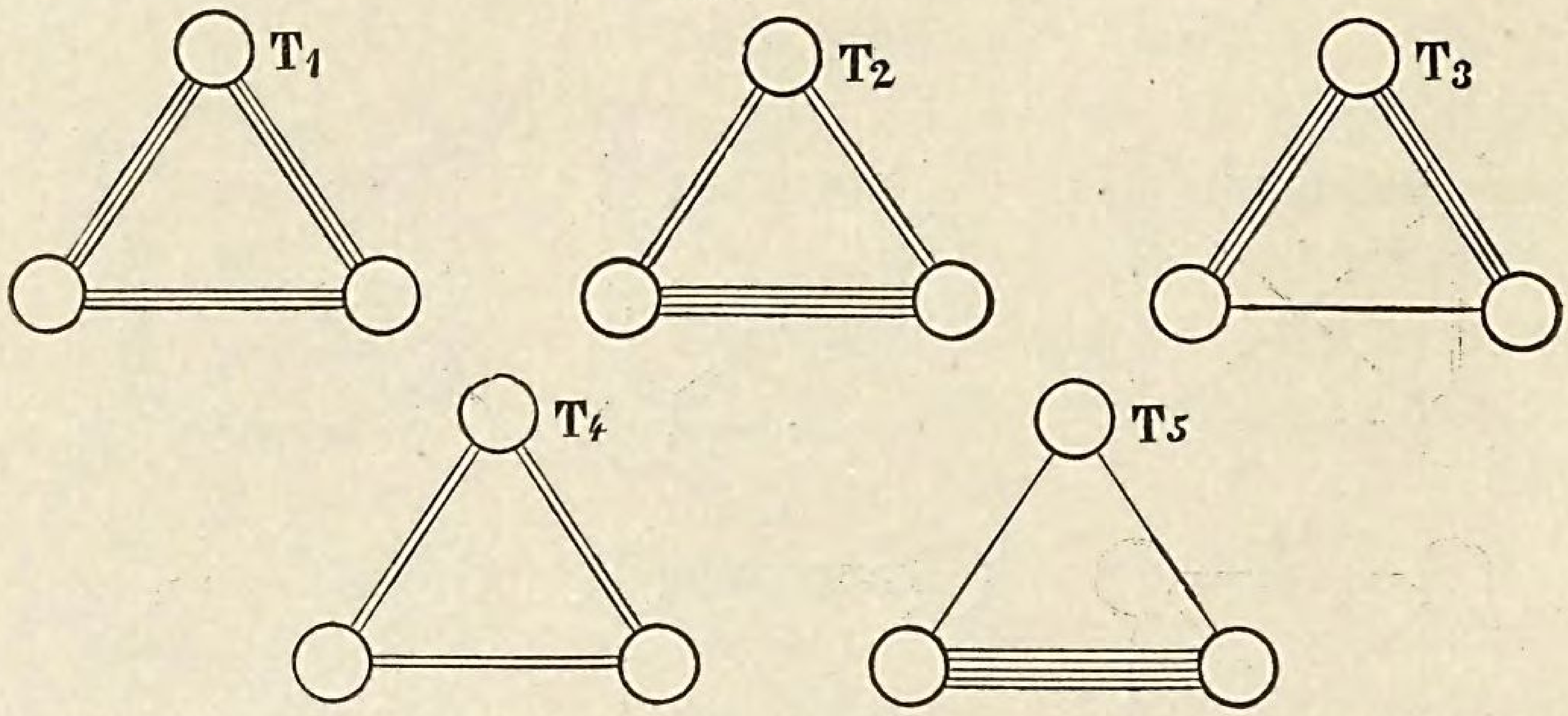
der Umläufe für das Sechseck kurz ausgedrückt $= 8\,P_1 + 4\,P_2 + 8\,P_3 + 4\,P_4$. Unterdrückt man nun in jedem Fünfeck die obere Ecke, so erhält man im Ganzen sechs verschiedene Vierecke, die wir mit Q_1 bis Q_6 (Fig. 117) bezeichnet haben. Das erste derselben mit drei dreifachen und zwei doppelten Seiten kommt bei P_1 sechsmal, bei P_2 achtmal, bei P_3 und bei P_4 zweimal heraus. Das zweite hat lauter Doppellinien und ist in P_1 viermal, in P_3 doppelt zu rechnen, während es in P_2 und P_4 nicht vorkommt. Das Viereck Q_3 kommt bei P_1 und P_2 sechsmal heraus und hat drei in einer Ecke zusammenpassende Doppellinien und eine dreifache Seite. Q_4 mit einer vierfachen und einer doppelten Seite kommt nur in P_1 und zwar sechszehnmal vor, Q_5 mit zwei gegenüberliegenden vierfachen Seiten kommt nur in P_2, und zwar doppelt vor und Q_6 mit einer dreifachen und zwei ihr benachbarten Doppelseiten kommt sechszehnmal bei P_2 und bei P_4 heraus. Demnach ist

$$P_1 = 6\,Q_1 + 4\,Q_2 + 16\,Q_3 + 16\,Q_4,$$
$$P_2 = 8\,Q_1 + 16\,Q_3 + 2\,Q_5 + 16\,Q_6,$$
$$P_3 = 2\,Q_1 + Q_2,$$
$$P_4 = 2\,Q_1 + Q_5 + Q_6.$$

Bei den sechs Vierecken unterdrücken wir eine der oberen Ecken und erhalten so im Ganzen die fünf in der Fig. 118 dargstellten Dreiecke T_1 bis T_5. Von ihnen hat T_1 lauter dreifache Wege,

T_2 einen vierfachen und zwei doppelte, T_3 zwei dreifache, T_4 drei doppelte und T_5 einen fünffachen Weg. T_2 kommt bei allen Vier-

Fig. 118.



ecken, allerdings in verschiedener Anzahl heraus, T_1 in den ersten dreien, T_3 in Q_1, Q_4 und Q_5, T_4 in Q_2 und T_5 in Q_6. Demnach ergiebt sich:[1])

$$Q_1 = 6\,T_1 + 24\,T_2 + 48\,T_3.$$
$$Q_2 = 8\,T_1 + 24\,T_2 + 64\,T_4.$$
$$Q_3 = 2\,T_1 + 4\,T_2.$$
$$Q_4 = 2\,T_2 + 4\,T_3.$$
$$Q_5 = 48\,T_2 + 40\,T_3.$$
$$Q_6 = 2\,T_2 + 2\,T_5.$$

Wird nun zum Schluß die obere Ecke jedes Dreiecks und etwa vorkommende Sackgassen unterdrückt, so erhält man drei Netze mit nur je zwei Bezirken zu sechs, vier und zwei Linien (Fig. 119).

Fig. 119.



Man erhält:

$$T_1 = 6\,D_1 + 144\,D_2,\quad T_2 = 2\,D_1 + 16\,D_2,\quad T_3 = 12\,D_2,$$
$$T_4 = 2\,D_2 + 4\,D_3,\quad T_5 = D_1.$$

Nun läßt aber $D_1 = 2 \times (1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5) = 240$, $D_2 = 2 \times (1 \times 2 \times 3) = 12$ und $D_3 = 2 \times 1 = 2$ Umläufe zu.

[1]) Bei Lucas finden sich eine ganze Reihe von Fehlern; so statt $P_4 = 2\,Q_1 + Q_5 + Q_6$, $P_4 = 2\,Q_1 + Q_6$; statt $Q_3 = 2\,T_1 + 4\,T_2$ $Q_3 = 2\,T_1 + 2\,T_2$; statt $Q_5 = 48\,T_2 + 40\,T_3$ $Q_5 = 48\,T_2 + 24\,T_3$; statt $P_3 = 127\,616$ $P_3 = 127\,916$; statt $H = 8\,645\,088$ $H = 86\,665\,088$.

Setzen wir diese Werte allmählich in die Werte für T, Q, P und H ein, so erhalten wir der Reihe nach rückwärts:[1])

$$T_1 = 3168,\ T_2 = 672,\ T_3 = 144,\ T_4 = 32,\ T_5 = 240.$$

$$Q_1 = 42048,\ Q_2 = 43520,\ Q_3 = 9024,\ Q_4 = 1920,$$
$$Q_5 = 38016,\ Q_6 = 1824.$$

$$P_1 = 601\,472,\ P_2 = 585\,984,\ P_3 = 127\,616,\ P_4 = 122\,112.$$

---

[1]) Hier ist die Rechnung im Einzelnen:

$$T_1 = 6 \times 240 + 144 \times 12 = 1440 + 1728 = 3168$$

$$T_2 = 2 \times 240 + 16 \times 12 = 480 + 192 = 672$$

$$T_3 = 12 \times 12,\quad T_4 = 2 \times 12 + 4 \times 2 = 32,\quad T_5 = 240.$$

$$Q_1 = \underbrace{6 \times 3168}_{19\,008} + \underbrace{24 \times 672}_{16\,128} + \underbrace{48 \times 144}_{6812} = 42\,048.$$

$$Q_2 = \underbrace{8 \times 3168}_{25\,344} + \underbrace{24 \times 672}_{16\,128} + \underbrace{64 \times 32}_{2048} = 43\,520.$$

$$Q_3 = \underbrace{2 \times 3168}_{6336} + \underbrace{4 \times 672}_{2688} = 9024.$$

$$Q_4 = \underbrace{2 \times 672}_{1344} + \underbrace{4 \times 144}_{576} = 1920.$$

$$Q_5 = \underbrace{48 \times 672}_{32\,256} + \underbrace{40 \times 144}_{3456} = 38\,016.$$

$$Q_6 = \underbrace{2 \times 672}_{1344} + \underbrace{2 \times 240}_{480} = 1824.$$

$$P_1 = \underbrace{6 \times 42\,048}_{252\,288} + \underbrace{4 \times 43\,520}_{174\,080} + \underbrace{16 \times 9024}_{144\,384} + \underbrace{16 \times 1920}_{30\,720} = 601\,472.$$

$$P_2 = \underbrace{8 \times 42\,048}_{336\,384} + \underbrace{16 \times 9024}_{144\,384} + \underbrace{2 \times 38\,016}_{76\,032} + \underbrace{16 \times 1824}_{29\,184} = 585\,984.$$

$$P_3 = \underbrace{2 \times 42\,048}_{84\,096} + 43\,520 = 127\,616.$$

$$P_4 = \underbrace{2 \times 42\,048}_{84\,096} + 1824$$

Sechseck =

$$\underbrace{8 \times 601\,472}_{4\,811\,776} + \underbrace{4 \times 585\,984}_{2\,343\,936} + \underbrace{8 \times 127\,616}_{1\,020\,928} + \underbrace{4 \times 122\,112}_{488\,448} = 8\,665\,088.$$

Demnach ist $H = 8\,665\,088$ und die Anzahl der Umläufe für das Siebeneck das 15-fache dieser Zahl $= 129\,976\,320$. Multiplizirt man aber diese Zahl wegen der Einschiebung der acht Paschsteine mit $3^7 = 2187$ und mit 28 wegen der Ausbreitung in eine gerade Linie, so erhält man genau jene von Reiß erhaltene Zahl von fast acht Billionen verschiedenen Lösungen des gewöhnlichen Dominospiels.

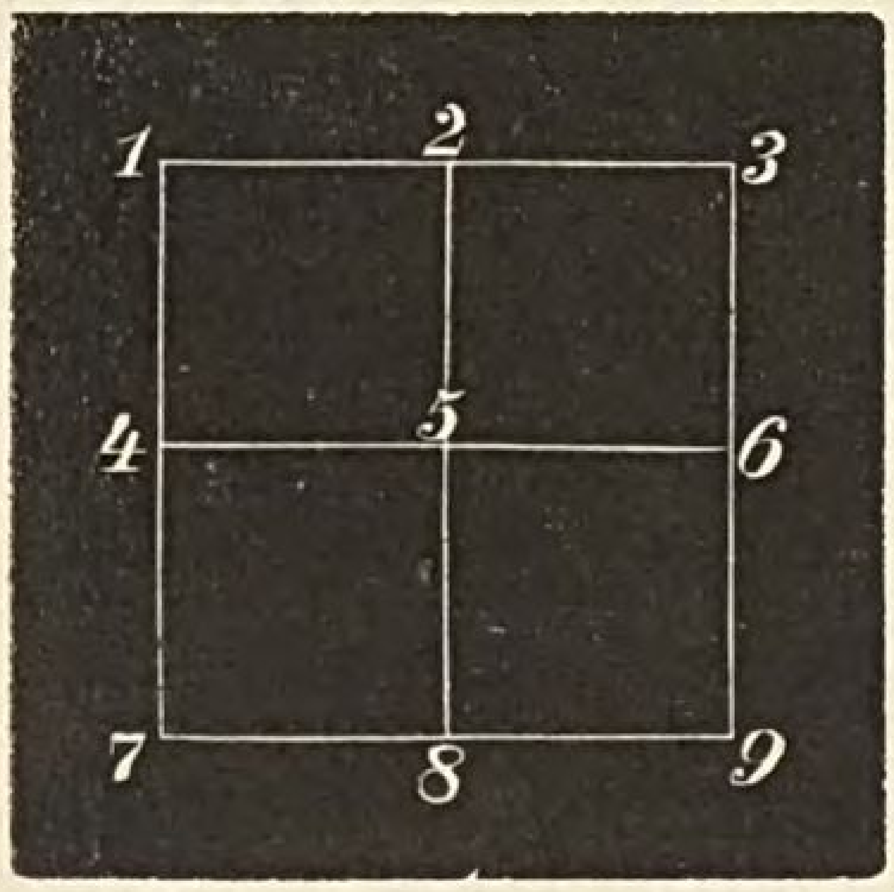
10.

Mühle- und Damespiel.

Herodot erzählt, daß die Lydier während einer Hungersnot das Würfelspiel erfunden hätten, um sich über die Qualen dieses Elends hinwegzutäuschen. Das Mühlespiel, das Damebrett und das Schachspiel sind den Griechen bekannt gewesen und wohl schon in den Zeiten der ältesten ägyptischen Kultur ausgeübt worden. Man findet Brettspiele auf Grabmälern in symbolischer Absicht verwendet. Bald sollen sie auf das wechselnde Glück alles Irdischen, bald auf das den Weisen und Gerechten versprochene Glück des ewigen Lebens hinweisen. Während die Würfelspiele mathematisch nur durch die Wahrscheinlichkeitsrechnung zugänglich sind, da sie vom Zufall abhängen, spricht bei den Brettspielen wesentlich eine große Geschicklichkeit in der Aufstellung der Kombinationen und im Ueberblick über dieselben mit. Die Mathematik lehrt, wie wir a. a. O. gezeigt haben, wie die Zahl der möglichen Stellungen gefunden wird und der Verstand muß nun die Konsequenzen der Wahl einer bestimmten Stellung unter allen möglichen übersehen können, entweder um sein Ziel eher zu erreichen, als der Gegner, oder um, wenn das möglich und vorteilhafter ist, durch den eigenen Zug einen für den Gegner günstigen Zug zu verhindern. Es sind auch den Alten bereits solche Spiele bekannt gewesen, bei denen Zufall und Geschicklichkeit eine Rolle spielen. So war in Persien ein Spiel Nerd bekannt, welches mit kleinen cylinderförmigen Türmen, ähnlich denen des Schachspiels, gespielt wurde. Plutarch berichtet, daß die Mutter des Artaxerxes, Parysatis, dieses Spiel sehr gewandt gespielt habe. Auch die Römer kannten ähnliche Spiele, so unser Trik-trak unter dem Namen „Ludus duodecim scriptorum“.

Was nun unser noch immer und verdientermaßen beliebtes Mühlespiel anbetrifft, so hat Ovid zweimal[1]) übereinstimmend dasselbe erwähnt. Im Orient spielte man es auf dem Erdboden, indem man durch Striche ein großes Quadrat mit seinen Diagonalen[2]) umrahmte, in welchem sich noch vier kleinere Quadrate befanden. Die neun Kreuzungspunkte bieten den beiden Spielern Auswahl für ihre Steine, von denen je drei gleiche Farbe besitzen. Die Spieler setzen abwechselnd: wer zuerst ansetzt, bestimmt das Loos; später setzt immer derjenige an, der das vorige Spiel gewonnen oder verloren hat, je nach Uebereinkunft. Nach dreimaligem Setzen haben die Steine ihren Platz und nun zieht man abwechselnd auf den Linien von Punkt zu Punkt. Derjenige hat gewonnen, der seine Steine zuerst in eine gerade Linie bringt. Zunächst werden wir leicht beweisen, daß der erste Spieler stets gewinnt, wenn er seinen ersten Stein in den Mittelpunkt setzen darf. Damit würde also das Spiel ein Hazardspiel und es muß verboten sein, daß der erste Spieler seinen Stein anfangs auf die Mitte setzt. Wir wollen die beiden Spieler mit A und B bezeichnen, die Felder aber mit Zahlen versehen und zwar mit 1, 3, 7, 9 die Ecken, mit 5 die Mitte und mit den übrigen geraden Zahlen die Mittelfelder der Seiten. Jede Ecke hat eine Gegenecke, zwei Nachbarecken, ebenfalls zwei Nachbarmitten und zwei Gegenmitten. Aehnlich ist es mit den Mittelfeldern. Nehmen wir einmal an, A dürfe zuerst in den Mittelpunkt setzen. Dann kann der Spieler B seinen ersten Stein entweder in eine Ecke oder in eine Mitte setzen, in welche der vier ist gleichgültig in Folge der Symmetrie. Wählt er die Ecke 1 (Fig. 120), so wird A in die Gegenecke 8 setzen; B muß demnach auf 2 setzen und A dann auf 3, um das Spiel nicht zu verlieren. Nun kommt der letzte Stein des B aus demselben Grunde auf 7. A braucht nun nur von 5 und 8 auf 6 und 9 zu spielen, was B nicht im Stande ist so zu verhindern, daß er gewinnen könnte. Die Steine des A stehen

Fig. 120.



[1]) Tristia, II. 481 und Ars amandi, III. 365.

[2]) Bei manchen Spielen fehlen die Diagonalen.

dann in gerader Linie auf 3, 6, 9. Wir könnten die Partie kurz so schreiben

A	5 8 3′ 89 56	g
B	1 2′ 7′ — —	

Der Index an einer Zahl deutet die Zwangslage des Spielers an, die Doppelzahl den Zug und das g den Sieg des Betreffenden, hinter dessen Reihe es steht. Hätte B seinen ersten Stein nicht in die Ecke, sondern auf ein Mittelfeld gesetzt, so wäre die Partie, korrekt gespielt, so verlaufen:

A	5 1 7′ 12 23	g
B	8 9′ 4′ — —	

Es muß also dem ersten Spieler verboten sein, in den Mittelpunkt 5 zu setzen. Natürlich wird bei richtigem Spiel dann B stets seinen ersten Stein dort aufstellen. Nun sind sechs Fälle zu unterscheiden, von denen B fünf, falls er keinen Fehler begeht, gewinnen wird, während der sechste unentschieden bleiben würde. Die übrigen Möglichkeiten kommen wegen der Symmetrie in Bezug auf den Mittelpunkt auf einen jener sechs Fälle zurück. Die Fälle sind folgende. A setzt

I. auf zwei Gegenmitten (2, 8):

A	2 8 1′ —	g
B	5 9 4 96	

II. auf zwei Nachbarmitten (2, 6):

A	2 6 3′ —	g
B	5 7 9 58	

III. auf Ecke u. Gegenmitte (1, 6):

A	1 6 3′ —	g
B	5 7 2 78	

IV. auf Ecke u. Nachbarmitte (1, 2):

A	1 2 7′ —	g
B	5 3′ 9 56	

V. auf zwei Gegenecken (1, 9):

A	1 9 2′ —	
B	5 8 3′ 87	g

VI. auf zwei Nachbarecken (1, 3):

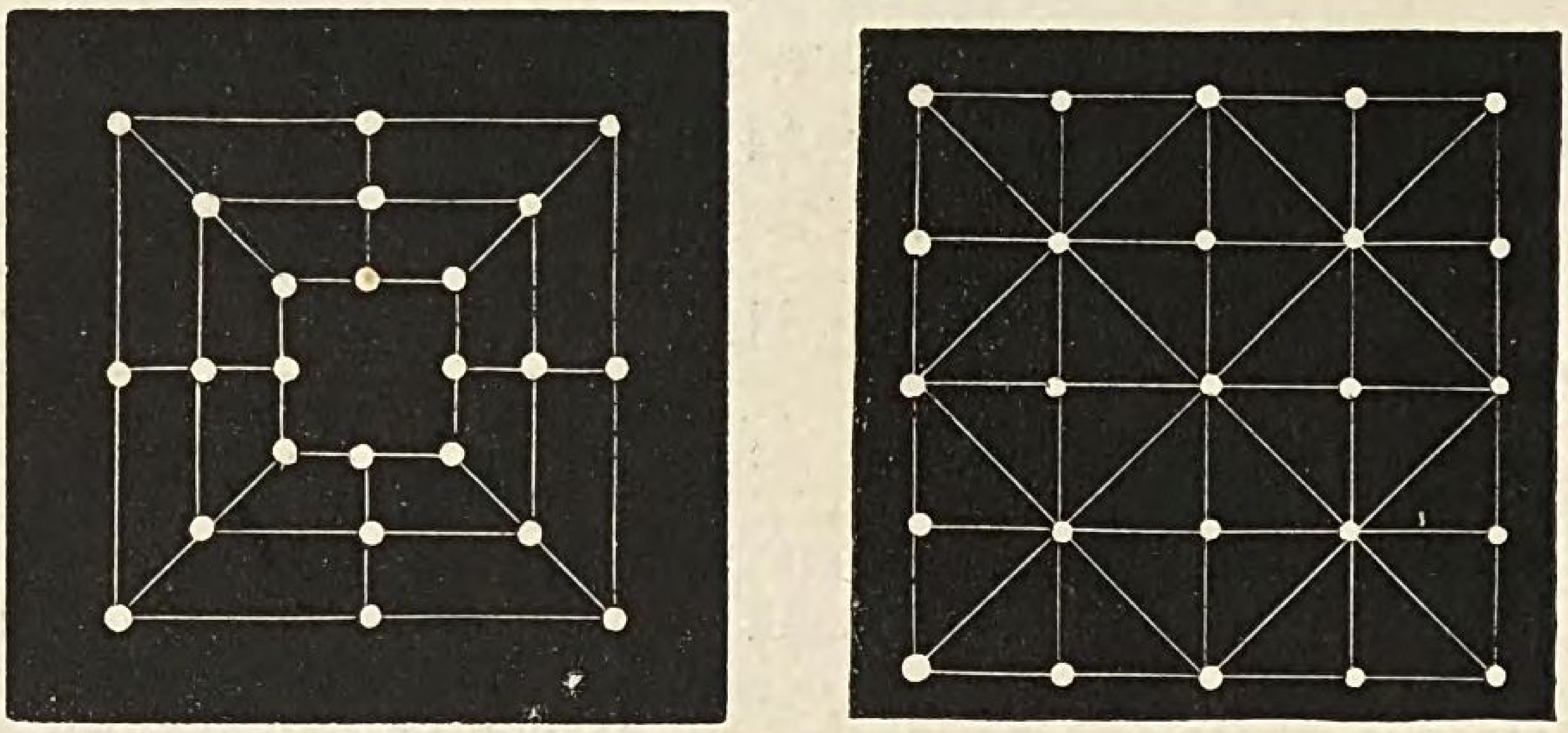
A	1 3 8′
B	5 2′

Hat A seine ersten beiden Steine in zwei Nachbarecken untergebracht, so hat B, nachdem er den erzwungenen Satz 2′ vorgenommen hat, für seinen dritten Stein die Wahl einer Ecke oder Mitte. Wählt er das letztere, so wird er durch den nächsten Zug des A eingeschlossen, muß aus der Mitte fort und verliert. Setzt er aber in eine Ecke, z. B. 7, so muß A auf 3 den Stein belassen und wird 1 auf 4 spielen. Zieht nun B von 2 auf 1, so ge-

winnt A, da er B einschließen kann; 7 kann er nicht ziehen, folglich muß er die Mitte verlassen und von 5 auf 6 oder 9 ziehen. In beiden Fällen kommt man auf eine Stellung zurück, die zu einer vorher schon dagewesenen symmetrisch ist. Beide Spieler mögen also, falls sie es vermeiden, eingeschlossen zu werden, noch so lange spielen, das Spiel kommt nicht zu Ende, so lange richtig gespielt wird, da periodisch die zu einer früheren symmetrische Stellung wiederkehrt. Sobald es demnach erlaubt ist, die Mitte zu besetzen, hat derjenige, der sie besitzt, die größten Aussichten, zu gewinnen. Verbietet man aber beiden Spielern, die Mitte zu besetzen, so bleibt die Partie stets unentschieden, so lange kein Fehler gemacht wird. Dies ist das einfache Mühlespiel.

Die in den Läden käuflichen Mühlespiele sind meist zusammengesetzte, wie z. B. die in der Fig. 121 dargestellten. Die erste Mühle hat 24 Felder. Jeder Spieler bekommt neun Steine von

Fig. 121.



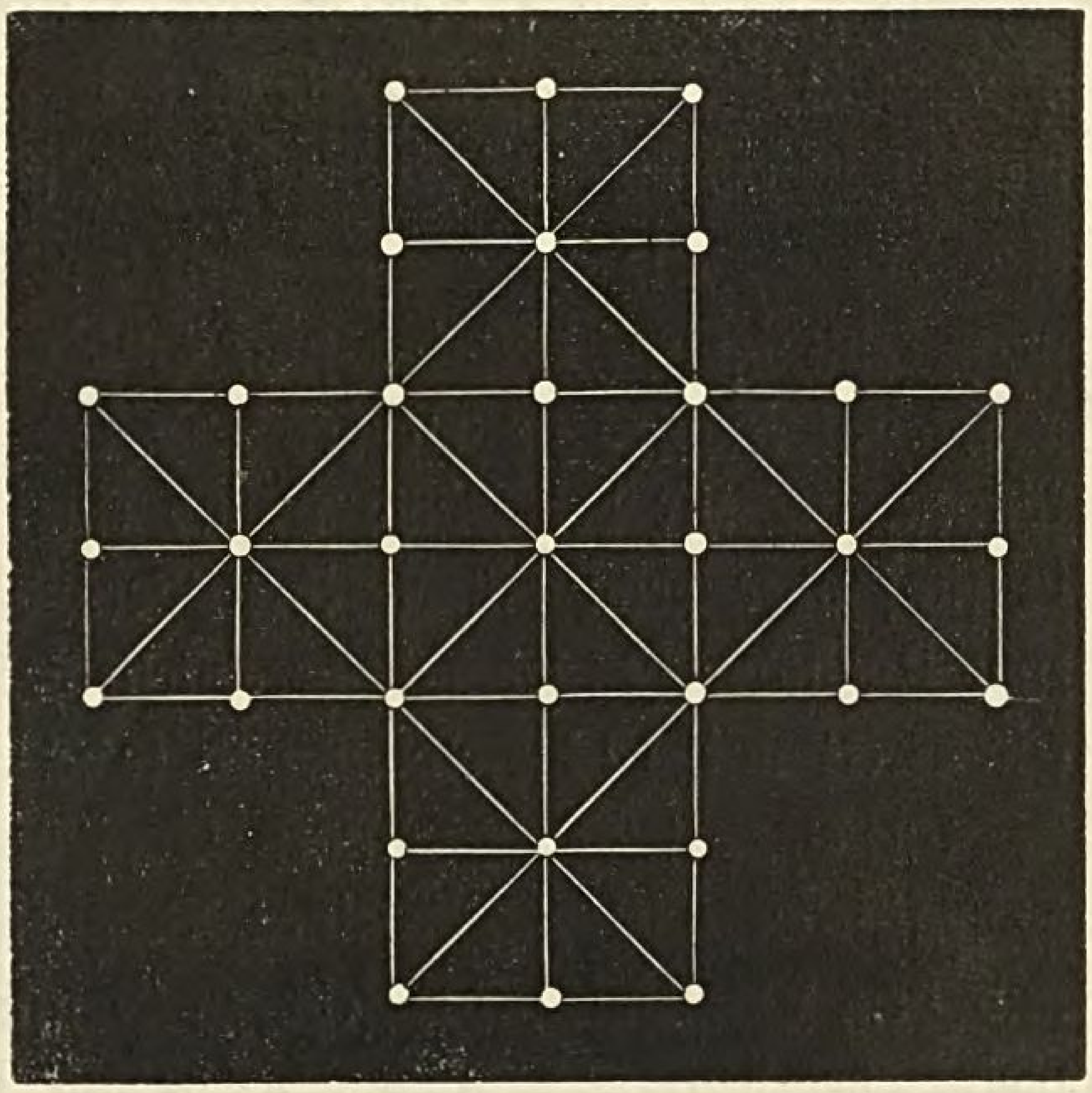
verschiedener Farbe, die abwechselnd gesetzt werden. Sobald alle Steine gesetzt sind, zieht man auf den Linien[1]) von Punkt zu Punkt. Es kommt darauf an, wie vorhin, drei Steine in gerade Linie zu bringen und sobald einer der Spieler dies erreicht hat, nimmt er dem Gegner einen beliebigen Stein fort und das Spiel geht weiter. Am günstigsten ist eine einfache oder doppelte Zwickmühle, welche

[1]) Bei vielen Spielen fehlen die Diagonalen. Dadurch wird die Zahl der Wege um acht verringert; aber auch die Möglichkeit, Mühlen, besonders Zwickmühlen zu bilden, wird geringer. Unter einer Zwickmühle versteht man zwei oder mehr benachbarte Mühlen, die so beschaffen sind, daß mit einem Zuge die eine geöffnet und die andere geschlossen wird. Je zwei solcher Mühlen haben dann denjenigen Stein gemeinsam, mit welchem die Oeffnung und der Schluß durch einen Zug bewerkstelligt wird.

gestattet, mit jedem Zuge drei Steine in gerade Linie zu bringen. Jeder muß seinen Gegner daran zu hindern suchen, eine Zwickmühle anzulegen oder er muß ihm die gebildete zerstören. Sobald einer der Spieler nur noch vier Steine besitzt, darf er beim Zuge ein Mittelfeld, falls es leer ist, überspringen. Das Spiel ist beendet, sobald einer der Spieler nur noch zwei Steine besitzt. Das in der zweiten Figur dargestellte Spiel ist aus vier einfachen Mühlen zusammengesetzt und ist bereits im Altertum bekannt gewesen. Jeder Spieler hat fünf Steine, die er in gerade Linie zu bringen sucht. Wem das zuerst gelingt, der ist Sieger.

Denkt man sich aus dieser Figur die Diagonalen und die mittlere kleine Mühle fortgenommen, so bleibt ein Grundriß übrig, der dem Pessos-Spiel der Griechen, welches Plato, Aristoteles, Sophokles, Plutarch und Andere erwähnen, entspricht. Jeder der beiden Spieler stellt am Anfange des Spiels seine fünf Steine auf den gegenüberliegenden Seiten des Quadrats auf. Von hier aus macht er seine Züge gegen den Gegner von Punkt zu Punkt, doch darf er nie zurückweichen. Hat er einen Stein des Gegners umschlossen, so nimmt er ihn fort und zieht weiter. Lucas macht darauf aufmerksam, daß, falls man den Spielern gestattet, mit ihren Steinen auch zurückzuweichen, alle Partien nach dem neunten Zuge des zweiten Spielers auf einen Punkt gebracht werden, der das Spiel unentschieden werden läßt.

Fig. 122.



Eine Abart dieses Spieles ist Fuchs und Hahn, bei welchem (Fig. 122) vier kleine Mühlen die Form eines Kreuzes bilden.[1])

[1]) Unter den von mir eingesehenen, bei unserer Jugend gebräuchlichen Spielen befand sich auch eines, bei welchem der Grundplan derselbe war, wie bei „Fuchs und Hahn“. Die Spielregeln waren ein wenig geändert.

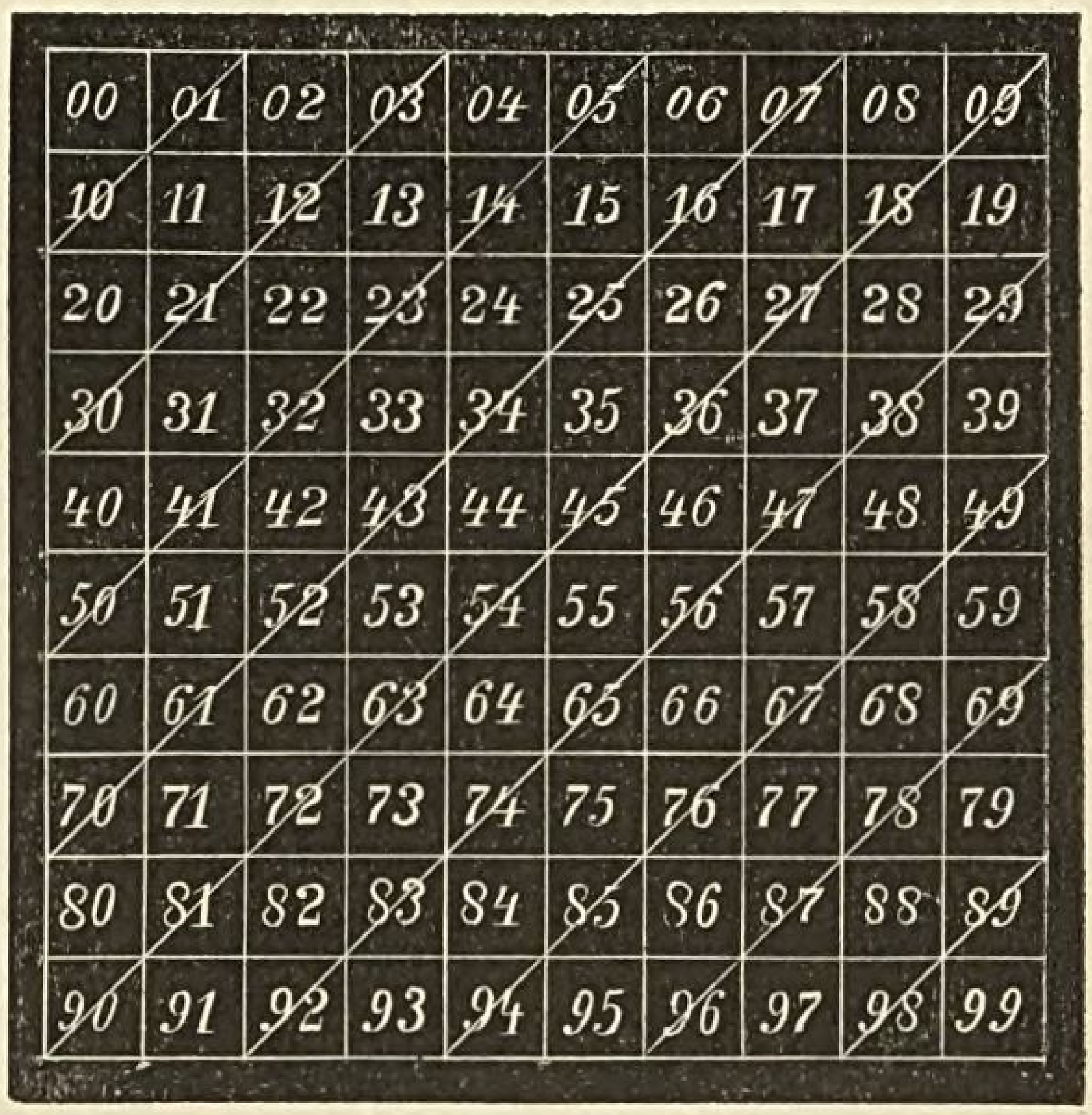
Die Lydier sollen es erfunden haben, denen Cyrus den Beinamen „Hähne“ gegeben hatte, da sie diesen Leckerbissen gern aßen, während jene unter dem Bilde des „Fuchses“ den Cyrus sich dachten, der sie immerfort zu überlisten und zu fangen suchte. Dreizehn Steine stellen die Hähne vor, welche im Beginn des Spieles auf die drei unteren Reihen des Spieles gesetzt werden. Der Fuchs kann ein beliebiges anderes der übrigen zwanzig Felder besetzen und seine Züge in beliebiger Richtung ausführen, während die Hähne nur nach oben ziehen dürfen. Ihre Aufgabe ist es, den Fuchs fest einzuschließen, doch müssen sie sich hüten, ungedeckt und allein auf einem Felde zu stehen, da sie sonst eine Beute des Fuchses sind.

Eine der zahlreichen Abänderungen des Mühle- oder Pessosspiels ist „Hund und Fuchs“. Es wird auf einem Damebrett mit hundert Feldern gespielt. Fünf Hunde besetzen die weißen Felder der ersten Reihe, der Fuchs ein beliebiges weißes der letzten Reihe. Er darf vor und zurück, die Hunde nur vor. Ihre Aufgabe ist es, den Fuchs einzuschließen und zu verhindern, daß er ihre Reihe durchbricht. In diesem Falle hat er gewonnen. Aehnliche Spiele werden wir beim Damespiel kennen lernen. Aber auch hier ist ebensowenig, wie bei den früheren Spielen, die Partie gleich. Denn man kann zeigen, daß die fünf Hunde jeder Falle und jedem Angriffe des Fuchses ausweichen und ihn stets zum Rückzuge zwingen können. Stellt der Fuchs irgend eine Falle, so können die Hunde in fünf oder zehn Zügen ihre Verteidigungslinie, die den Fuchs zum Zurückweichen zwingt, hergestellt haben. Dasselbe gilt auch für ein Brett mit 144 Feldern und sechs Hunden und so fort.

In einer seiner grausigen Erzählungen zieht der amerikanische Schriftsteller Edgar Pöe einen Vergleich zwischen dem Schachspiel und dem Damespiel, der sehr zu Gunsten des letzteren ausfällt. Er meint, bei dem Schachspiel werde oft die Kompliziertheit für Tiefe gehalten. Von einem Irrtum hänge oft der Erfolg des Spiels ab und nicht der geschickteste, sondern der aufmerksamste Spieler sei der Gewinner. Beim Damespiel, wo die Verhältnisse durchsichtiger und die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers geringer seien, könne die tiefere Einsicht in den Zusammenhang der Züge eher den Sieg davon tragen. Der Spieler vermöge leichter die Konsequenzen seiner Züge zu übersehen und die Gedanken und Pläne seines

Gegners besser zu erraten. Das Damespiel ist uralt. Im Britischen Museum und im Louvre finden sich aus der Zeit der Pharaonen Darstellungen des Brettspiels. Plato erzählt, daß Hermes (Merkur), der Erfinder desselben, mit Selene (Luna), der Mondgöttin, gespielt und die Partie gewonnen habe. Diese habe ihm als Preis fünf Tage geschenkt, die er dem Jahre von 360 Tagen hinzugefügt habe. Ganz ähnlich ist, wie wir erläutert haben, das Pessos-Spiel der Griechen, welches Homer im ersten Buche (Vers 107) seiner Odyssee erwähnt. Die Freier der Penelope sitzen vor den Thoren des Palastes und vertreiben sich die Zeit mit jenem Spiele. Das gewöhnliche Brettspiel hat 100 Felder und die große Diagonale der w e i ß e n Felder soll sich stets zur Linken der beiden Spieler befinden. Man setzt 20 Steine auf die w e i ß e n Felder der vier ersten Reihen und ebensoviele auf diejenigen der letzten Reihen. Derjenige, welcher anspielt, wird durchs Loos bistimmt. Das Spiel ist beendet, wenn ein Spieler keine Steine mehr hat oder nur solche, mit denen er nicht mehr spielen kann, da sie eingeschlossen sind. Bisweilen läßt sich das Ziel nicht erreichen, dann bleibt die Partie unentschieden. Also die weißen Felder sollen das Schlachtfeld bilden und nach dem Vorschlage Vandermonde's[1]) (Fig. 123) bezeichnet werden. Man lese die beiden Ziffern stets getrennt. Die erste bedeutet die senkrechte Reihe, die zweite die wagerechte. Wir brauchen hier die Nummern von 00 bis 99. Die Nummern einer weißen Reihe sind entweder beide ungerade oder gerade, also 1, 3, 5, 7, 9 oder 0, 2, 4, 6, 8. Die große weiße Diagonale hat lauter Zahlen mit gleichen Ziffern. Die zu ihren Seiten liegenden

Fig. 123.



---

1) Siehe den Abschnitt 3. Die schwarzen Felder des Quadrates sind in der Figur durch Diagonallinien bezeichnet.

symmetrischen Felder haben auch symmetrische Bezeichnungen, z. B. 35 und 53, auf der einen Seite vermindert sich die erste Zahl um je eine Einheit, die zweite aber vermehrt sich um ebensoviel, auf der andern Seite ist es umgekehrt. Der Marsch der Steine vollzieht sich auf den Diagonalreihen von Feld zu Feld nach vorwärts; seiner ersten Stellung entsprechend kann ein schwarzer von dem Felde pq entweder auf $(p + 1)(q + 1)$ oder auf $(p - 1)(q + 1)$ ziehen, während der auf diesem Felde befindliche weiße auf $(p + 1)(q - 1)$ oder $(p - 1)(q - 1)$ gelangen kann. Sobald ein Stein auf die letzte Reihe des Gegners gelangt ist, wird er mit einem Stein von gleicher Farbe bedeckt und dieser Doppelstein heißt Dame. Diese kann vorgehen oder zurückweichen nach Belieben und beliebig viele Felder der Diagonale überspringen; sie kann demnach von pq nach $(p \pm x)(q \pm x)$ gelangen, so lange diese Summen oder Differenzen gleich oder kleiner als Neun und gleich oder größer als Null sind.

Wenn ein Stein oder eine Dame einen oder mehrere Steine des Gegners schlagen kann, so wird die Bewegung freier. Ein Stein auf 26 könnte die gegnerischen Steine in 37, 35, 17, 15 schlagen und das folgende Feld 48, 45, 08, 04 besetzen. Ebenso kann eine Dame auf der ganzen Diagonale verfahren: sie besetzt das auf den geschlagenen Stein folgende Feld. Stein und Dame können nach diesen Grundsätzen auch nacheinander mehrere Steine nehmen. Dabei sind folgende Regeln zu beachten: Zwei Steine zu nehmen ist besser als eine Dame, zwei Steine und eine Dame sind besser als drei Steine und schlechter als vier Steine. Man darf die übersprungenen Steine erst am Ende des Zuges fortnehmen und nicht zum zweiten Male über denselben Stein springen.

Man kann das Brettspiel auch so spielen, daß derjenige Spieler gewinnt, der sonst verlieren würde, also wenn alle seine Steine genommen oder umstellt sind. Der Gegner hat dann zum Schluß gegen einen einzigen Stein zu spielen und muß vermeiden, in solche Stellungen zu kommen, daß er gezwungen ist, ihn zu nehmen oder zu blokiren. Es ist aber nachgewiesen worden, daß dieser eine etwa weiße Stein, sobald er durch vier schwarze Steine in eine Ecke getrieben ist, veranlaßt werden kann, sämmtliche schwarzen Steine zu nehmen, ohne daß er selbst in die Lage kommen

kann, seitens der schwarzen genommen zu werden und es siegen dann auf jeden Fall in diesem Spiele „Wer verliert, gewinnt“ die schwarzen Steine. Es giebt auch eine Vorschrift darüber, wie Schwarz vorgehen muß, um den weißen Stein in jene Blockadestellung zu bringen; doch würde es uns hier zu weit führen, auf diese immerhin verwickelten Verhältnisse einzugehen. Nur soviel sei noch bemerkt, daß die übrigen schwarzen Steine, welche, abgesehen von jenen vier, nicht bei der Blockade beteiligt sind, zu Damen gemacht und so geschoben werden, daß der weiße Stein sie nacheinander nehmen muß. Jedenfalls stellt das Spiel an das Kombinationsvermögen und Gedächtnis der Spieler hohe Anforderungen.

Fig. 124.

1	2	3	4	5	6	7	8
8	7	6	5	4	3	2	1
1	2	3	4	5	6	7	8
8	7	6	5	4	3	2	1
1	2	3	4	5	6	7	8
8	7	6	5	4	3	2	1
1	2	3	4	5	6	7	8
8	7	6	5	4	3	2	1

In den Verkaufsläden findet sich neuerdings ein Zahlenbrettspiel von folgender Einrichtung. Auf einem quadratisch geteilten Brette von acht Reihen sind die vierundsechzig Felder numerirt, jede Reihe von 1 bis 8, aber abwechselnd in umgekehrter Reihenfolge, so daß an den beiden andern gegenüberliegenden Seiten nur die Nummern 1 und 8 abwechselnd sich befinden. Auch die acht Steine sind numerirt und werden gegenüber auf die Nummern 1 bis 8 gestellt. Es kommt darauf an, zuerst die Steine auf die zugehörigen Felder der gegenüberliegenden Seite zu bringen. Wenn man schlägt, soll der eigene Stein auf dasselbe Feld gesetzt werden, wo der ge-

schlagene Stein gestanden hat, und wenn die Eins geschlagen ist, so ist das Spiel beendet. Die Züge geschehen gerade aus und schräg und man kann entweder von Feld zu Feld rücken oder man kann, was beim schrägen Zug besonders für die hohen Nummern wichtig ist, diejenigen Felder, welche niedrigere Nummern haben, als der Stein, überspringen. Das Feld hat die in Fig. 124 dargestellte Form. Die Eins kann niemals Sprünge machen, sondern nur von Feld zu Feld gehen, muß sich aber vor dem Geschlagenwerden hüten; die Stellung am Rande schützt sie hier ja nicht davor.

11.

Bozz-Puzzle oder der Einsiedler.

Dieses Geduldspiel hat Jahre lang die ganze gebildete Welt beschäftigt und in Athem gehalten. Mit der Schnelligkeit einer Epidemie verbreitete es sich in kurzer Zeit überall hin. Ein Taubstummer in Nord-Amerika, der sich zufällig vornahm, eine Reihe von Nummern, die in einem Kasten lagen, zu ordnen, ohne sie herauszunehmen, soll das Spiel erfunden haben. Bereits im folgenden Jahre (1879) veröffentlichte der kürzlich verstorbene Professor Sylvester die mathematische Theorie des Spieles. Sie hängt zusammen mit den Gesetzen der Permutationen und ihren Inversionen. Wir müssen daher, um das Verständnis des Folgenden vorzubereiten, über jene zunächst Einiges vorausschicken. Der Kasten ist übrigens für sechszehn, mit den Nummern 1 bis 16 versehenen Steinen eingerichtet, die zu je vieren in einer Reihe liegen können. Die Nummer 16 wird aber zu Anfang des Spiels herausgenommen und die übrigen Steine an beliebige Plätze gesetzt. Dann soll man durch bloßes Vorschieben mit Hilfe des leeren Platzes die Reihenfolge der natürlichen Zahlen herstellen.

Eines der ersten Werke über Geduldspiele und verwandte Probleme hat Ozanam im Jahre 1692 herausgegeben. Hier findet sich folgende kleine Anekdote, die auch in dem mehrfach zitirten Werke von Montag in etwas anderer Form unter der Aufschrift: „Die unerträgliche Bewirtung von zwölf Gästen" erzählt wird. „Sieben Personen streiten sich vor dem Essen um die Tischplätze. Einer von ihnen macht scherzweise den Vorschlag, man könne ja heute und die übrigen Tage sich so zu Tisch setzen, wie es der Zufall füge, aber jeden Tag in etwas anderer Ordnung, bis alle Möglichkeiten er-

schöpft seien.“ Ozanam berechnet 5040 verschiedene Platzordnungen entsprechend dem Produkt der ersten sieben Zahlen. In Wirklichkeit sind es aber, da man doch in Kreisform geschlossen zu Tische sitzen wird, nur 720 Permutationen, also siebenmal so wenig, da es gleichgültig ist, mit wem die Reihe beginnt und endet. Ozanam's Berechnung würde für den Fall richtig sein, daß man in gerader Linie mit Anfang und Ende sitzen würde. Außerdem hat er außer Acht gelassen, daß es gleichgültig ist in Bezug auf die Nachbarschaft, ob man sich links- oder rechts herum setzt, wodurch sich die Zahl der Permutationen wieder noch auf die Hälfte reduzirt. In einem Jahre, zu 360 Tagen gerechnet, würden demnach alle Möglichkeiten erschöpft sein.

In dem Falle des Bozz-Puzzle dagegen bilden die Steine eine nicht geschlossene Linie und es giebt daher, wenn sich das freie Feld des 16-ten Steines stets an derselben Stelle befindet, $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 11 \times 12 \times 13 \times 14 \times 15$ Probleme. Das sind 1 Billion 307 674 Millionen und 365 000. Eine Tischgesellschaft von fünfzehn Personen, die alle Tage ihre Plätze wechselt, würde 3600 Millionen Jahre brauchen, um alle Falle durchzumachen, und selbst, wenn es möglich wäre, in jeder Sekunde eine neue Ordnung einzunehmen, würden 41 000 Jahre hingehen, ehe alle Formen vorgekommen sein würden. Nehmen wir nun an, daß auch der freie 16-te Platz seinen Ort beliebig wechseln kann, so sind noch sechszehnmal so viele Probleme möglich, also 20 Billionen 922 789 Millionen und 888 000.

Wir wollen jetzt die Lösung der Frage vorbereiten, ob es möglich ist, jedes dieser außerordentlich zahlreichen Probleme zu lösen, d. h. aus beliebiger Anfangsstellung in die natürliche Reihenfolge den Regeln des Spieles entsprechend überzuführen.

Zwei Steine 1 und 2 können entweder die Stellung 12 oder 21 zu einander haben. Die letztere nennt man eine Inversion. Bei drei Elementen sind bereits sechs Permutationen vorhanden: 123, 213, 132, 231, 312, 321. Die erste derselben enthält keine Inversion, die zweite und dritte eine (21 bzw. 32), die vierte und fünfte zwei (21, 31 bzw. 31, 32), die letzte endlich weist die drei Inversionen 32, 31, 21 auf. Eine solche Ueberlegung können wir nun auch für die eine beliebige Reihenfolge der Nummern des Bozz-

Puzzle anstellen; dabei wollen wir sämmtliche Stellungen in zwei Klassen teilen, in deren erste diejenigen gehören sollen, die eine gerade Anzahl Inversionen besitzen, während die übrigen mit ungerader Anzahl Inversionen die zweite Klasse bilden. So würde bei vier Elementen 4321 der ersten, 4231 der zweiten Klasse zuzurechnen sein, da erstere Form sechs (43, 42, 41, 32, 31, 21), letztere fünf (42, 43, 41, 21, 31) Inversionen aufweist. Aus diesen beiden Beispielen sehen wir auch, daß eine Vertauschung zweier benachbarter Elemente einen Wechsel der Klasse bedingt. Daraus folgt denn auch, daß eine gerade Anzahl Vertauschungen benachbarter Elemente die Klasse einer Form nicht ändert, wohl aber eine ungerade Anzahl.

Wenn man die Inversionen zählen will, so summirt man entweder alle diejenigen folgenden Zahlen, die kleiner sind, als eine der sämmtlichen in der Form vorhandenen oder diejenigen vorhergehenden, die größer sind. In der Form

1	6	2	3
5	10	7	4
11	8	12	15
9	13	14	—

giebt 1 zu keiner Inversion Veranlassung, 6 dagegen bildet mit 2, 3, 4, 5 je eine Inversion, also vier; 2 und 3 bilden keine, 5 eine, nämlich mit Vier, 10 drei, 7 eine, 4 keine, 11 zwei, 8 keine, 12 eine, 15 drei, 9, 13 und 14 keine. Die Summe sämmtlicher Inversionen

Fig. 125.

Normalform				II.				III.				IV.			
1	2	3	4	4	8	12	16	16	15	14	13	13	9	5	1
5	6	7	8	3	7	11	15	12	11	10	9	14	10	6	2
9	10	11	12	2	6	10	14	8	7	6	5	15	11	7	3
13	14	15	16	1	5	9	13	4	3	2	1	16	12	8	4
0				60				120				60			
Inversionen				3	6	9	12	16	14	13	12	12	8	4	0
				2	4	6	8	11	10	9	8	9	6	3	0
				1	2	3	4	7	6	5	4	6	4	2	0
				0	0	0	0	3	2	1	0	3	2	1	0

jener Form beträgt daher 15 und sie gehört demnach zur zweiten Klasse. Wir wollen bei den nächsten Beispielen die Zahlen der Inversionen in die Form einer quadratischen Tabelle setzen und jetzt diejenigen Formen betrachten (Fig. 125), welche aus der Normalform durch Drehung und Spiegelung entstehen. Alle vier durch Drehung erhaltene Formen gehören zur ersten Klasse, da die Summe der Inversionen bez. 0, 60, 120, 60 beträgt. Stellen wir dagegen die Bedingung, daß der leere Platz, welcher hier die Nummer 16 führt, ans Ende gesetzt wird, so gehören III und IV zur zweiten Klasse.

Bilden wir nun die Spiegelbilder (Fig. 126). Auch diese vier Formen gehören mit den Inversionssummen 24, 36, 96, 84 sämmtlich zur ersten Klasse. Denkt man sich die Felder des

Fig. 126.

V.				VI.				VII.				VIII.			
4	3	2	1	1	5	9	13	13	14	15	16	16	12	8	4
8	7	6	5	2	6	10	14	9	10	11	12	15	11	7	3
12	11	10	9	3	7	11	15	5	6	7	8	14	10	6	2
16	15	14	13	4	8	12	16	1	2	3	4	13	9	5	1
3	2	1	0	0	3	6	9	12	12	12	12	15	11	7	3
3	2	1	0	0	2	4	6	8	8	8	8	11	8	5	2
3	2	1	0	0	1	2	3	4	4	4	4	7	5	3	1
3	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	2	1	0

Kästchens, auf denen die Steine sich befinden, wie beim Schachbrett abwechselnd gefärbt, so daß niemals zwei Felder gleicher Farbe aneinanderstoßen, so kann man offenbar, ohne daß sich die Klasse ändert, eine beliebige Anzahl Nummern vertauschen, sobald dieselben sich auf Feldern gleicher Farbe befinden. Dagegen ändert sich die Klasse, sobald man zwei Nummern miteinander vertauscht, die auf Feldern verschiedener Farbe liegen. Dasselbe gilt auch für Vertauschung des leeren Feldes.

Statt die Inversionen zu zählen, kann man auch durch Bildung von Vertauschungskreisen die Klasse einer Form bestimmen. Wir vergleichen dabei zwei Formen miteinander und bilden aus den Nummern Kreise in der Art, wie die folgenden Beispiele der acht Hauptfiguren es zeigen. Die erste Form bildet mit sich selber

sechszehn Vertauschungskreise. Die zweite mit der ersten verglichen ergiebt:

II.	4,	8,	12,	16,	3,	7,	11,	15,	2,	6,	10,	14,	1,	5,	9,	13
I.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

1, 4, 16, 13; 2, 8, 15, 9; 3, 12, 14, 5; 6, 7, 11, 10, also 4 Kreise; für die Form III finden wir 1, 16; 2, 15; 3, 14 u. s. f., also 8 Kreise; für IV: 1, 13, 16, 4; 2, 9, 15, 8; 3, 5, 14, 12; 6, 10, 11, 7 (4 Kreise); für V: 1, 4; 3, 2; 5, 8; 6, 7; 9, 12 . . . im ganzen 8 Kreise; für VI: 1; 12; 6; 11; 16; 2, 5; 3, 9; 4, 13; 7, 10; 8, 14 (10 Kreise); für VII: 1, 13; 2, 14; 3, 15; 4, 16; 5, 9 u. s. f.; im ganzen 8 Kreise; für VIII: 4; 7; 10; 13; 9, 14; 1, 16; 2, 12; 3, 8; 5, 15; 6, 11 (10 Kr.).

Wenn die Zahl der Inversionen geradzahlig ist, so ist stets auch die Zahl der Vertauschungskreise geradzahlig und umgekehrt. Stellen wir für unsere Hauptformen die Bedingung, daß der leere Platz stets in der unteren rechten Ecke sich befindet, so kann sich die Klasse unter Umständen natürlich ändern, da ja dann gegebenen Falles sämmtliche Nummern einen andern Platz erhalten. Bei Form I und II ist ja der leere Platz schon am richtigen Ort. Die Form II erhält eine ungerade Anzahl Inversionen, da 13 mit 14, 14 mit 15 und 15 mit 16 vertauscht werden muß. Auch Form V (Fig. 127) kommt beim Uebergang in

Fig. 127.

4	3	2	1		3	2	1	0
8	7	6	5	in eine andere Klasse,	3	2	1	0
12	11	10	9	da das Quadrat:	3	2	1	0
15	14	13	—		2	1	0	0

die Inversionszahlen darstellt, deren Summe 21 beträgt. Die Vertauschungskreise haben sich um einen vermehrt (9 statt 8). Sie lauten: 1, 4; 3, 2; 8, 5; 7, 6; 12, 9; 11, 10; 15, 13; 14; 16. Auch die Formen IV und VII kommen in die zweite Klasse (Fig. 128), wenn sie übergehen in

Fig. 128.

12	8	4	1		12	13	14	15
13	9	5	2	und	8	9	10	11
14	10	6	3		4	5	6	7
15	11	7	—		1	2	3	—

Dagegen bleiben III und VIII in derselben Klasse, wenn der Platz unten rechts leer bleibt; sie können ja auch aus I und VI,

die ja ebenfalls in der ersten Klasse verbleiben, erhalten werden. Wir haben es nun, wenn wir eine der acht Hauptformen als Lösung zulassen, in der Hand, jedes Problem in eine dieser Formen überzuführen und zwar, wenn das gestellte Problem der ersten Klasse angehört, in die Formen I, III, VI und VII, in eine der übrigen vier Formen dagegen, wenn die Aufgabestellung in die zweite Klasse gehört. Zwei beliebige Stellungen können nach den Regeln des Spiels in einander übergeführt werden, wenn sie derselben Klasse angehören, anderen Falles nicht. Wird also nur die Form I in der Lösung zugelassen, so kann nur die Hälfte sämmtlicher Anfangsstellungen gelöst werden. Ehe die Theorie bekannt genug geworden war, quälte man sich ohne weitere Vorüberlegung damit, die Normalstellung zu erreichen. So auch in dem Falle, von welchem Prof. Schubert (Naturw. Wochenschrift Bd. VIII. 35) berichtet. Im Jahre 1880 hatte der Wirt des Elbpavillons in Hamburg ein großes Preistournier für unser Spiel veranstaltet. Viele Hunderte von Menschen saßen, um den hohen Preis zu verdienen, an den kleinen Tischen des Cafés und mühten sich ab, die 15 Steine in die richtige Lage zu bringen. Das gelang ihnen für die ersten dreizehn Steine, die beiden letzten aber waren und blieben in der Inversion: denn die Stellung 15, 14 läßt sich niemals in die Lage 14, 15 verwandeln, wie oft man auch die Steine verschiebt. Die Aufgabe, welche der Wirt als Preisaufgabe gestellt hatte, gehört zur zweiten Klasse. Da die verlangte Normalstellung zur ersten gehört, so war die Ueberführung unmöglich.

Gemäß den Regeln des Spiels läßt sich demnach niemals eine Versetzung einer Form in die andere Klasse erreichen. Denn wenn sie sich einmal erreichen ließe, müßte sie sich auch am Schluß ausführen lassen. Demnach ist auch eine Vertauschung zweier benachbarter Steine nicht zu erzielen: denn diese bringt ja eine Aenderung der Klasse mit sich. Um dies zu verstehen, muß man sich Folgendes klar machen. Ein Stein, der mit Hilfe des leeren Platzes eine Wanderung macht, hat, an seinen alten Platz zurückgekehrt, stets eine gerade Anzahl von Zügen erfordert. Denn jeder in horizontaler oder vertikaler Richtung ausgeführte Zug ist ja wieder rückgängig gemacht worden. An die Stelle der Züge können wir uns aber eine Vertauschungsfolge benachbarter Steine gesetzt denken

und nachweisen, daß eine gerade Anzahl von Zügen auch einer geraden Anzahl von Vertauschungen benachbarter Steine äquivalent ist. Da jede einzelne derartige Vertauschung die Klasse ändert, so ändert eine paarige Anzahl dieselbe nicht, womit dann unser Satz bewiesen ist. Ein Vertauschungskreis von acht Steinen ist gleichwertig mit einer Zugfolge von zehn benachbarten Steinen. Die Formen

Fig. 129.

1	2	3	4		1	6	2	4
5	6	7	8		5	10	3	7
9	10	11	12		9	14	11	8
13	14	15	—		13	15	12	—

der Fig. 129 werden z. B. durch folgende zehn Züge in einander übergeführt: 12 auf —; 8 auf 12; 7 auf 8; 3 auf 7; 2 auf 3; 6 auf 2; 10 auf 6; 14 auf 10; 15 auf 14; 12 auf 15. Diese zehn Züge bilden aber den Vertauschungskreis 12, 8, 7, 3, 2, 6, 10, 14, 15. Es sind acht Vertauschungen benachbarter Steine den zehn Zügen gleichwertig. Da eine gerade Anzahl solcher Tausche auch ebenso viele Inversionen verursacht, womit jedesmal die Klasse sich ändert, so ist die Klasse nicht geändert worden. Dasselbe Ergebnis erhalten wir durch Zählung der Vertauschungskreise. Die erste Form der Fig. 129 hat mit sich selber 16 Kreise, die zweite dagegen hat nur noch 8 mit der ersten Form. Die übrigen acht sind durch die geschlossene Zugfolge von zehn Zügen verloren gegangen. Wollen wir nun einen Tausch nicht benachbarter Steine vornehmen, z. B. 2 und 11 in der Normalform, so sehen wir nach, wie viel benachbarte Steine wir vertauschen müssen. Es sind 2 mit 3, 2 mit 7, 2 mit 11, 11 mit 7, 11 mit 3 zu tauschen, also eine ungerade Anzahl (5). Die Klasse ändert sich also bei dem Tausch von 2 mit 11. Eine nähere Ueberlegung zeigt uns, daß die Nummern 1, 3, 6, 8, 9, 11, 14, 16 der Normalform unter einander vertauscht werden können, ohne daß die Klasse sich ändert, ebenso die übrigen Nummern unter einander. Das ist aber dieselbe Einteilung und Zusammenfassung, die durch die abwechselnde Färbung der Felder, von der wir oben sprachen, gekennzeichnet wird. Da wir demnach durch die nach der Spielregel gestatteten Züge die Klasse niemals ändern können, so kann von vornherein entschieden werden, ob zwei Formen in einander

überführbar sind: sie müssen eben derselben Klasse angehören. Die Form 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 14, 13, —, kann in die Form 4, 3, 2, 1, 5, 14, 13, 12, 6, 15, —, 11, 7, 8, 9, 10 übergeführt werden, da beide mit einander vier Vertauschungskreise bilden (5; 1, 41; 2, 3, 2; 6, 14, 8, 12, 11, —, 10, 15, 7, 13, 9, 6). Schubert hat darauf aufmerksam gemacht, daß dieses Merkmal auch Geltung hat für Einsiedlerspiele mit rechteckigem Querschnitt oder für quadratische Spiele mit beliebigen Seitenzahlen. Auch für Abänderungen des Spieles gilt das Kennzeichen, wenn etwa nicht die Normalstellung, sondern ein magisches Quadrat gebildet werden soll. So ist Fig. 130a in Fig. 130b überführbar, da beide vier Kreise bilden, nämlich: 5, 7, 1; 2; 3, 8, 4, 3; 6.

Fig. 130a.

5	2	8
3	7	6
1	4	—

Fig. 130b.

1	2	3
4	5	6
7	8	—

Das Rechteck 123 | 16, 5, 4 | 17, 14, 5 | 18, 13, 6 | 19, 12, 7 | 20, 11, 8 | —, 10, 9 | kann in seine Normalstellung ebenfalls übergeführt werden. Das magische Quadrat Fig. 131 kann nicht in die

Fig. 131.

15	1	2	12
4	10	9	7
8	6	5	11
3	13	14	—

Fig. 132.

12	2	1	15
7	9	10	4
11	5	6	8
—	14	13	3

Normalstellung gebracht werden, da beide mit einander fünf Vertauschungskreise bilden. Dagegen kann man die Normalstellung aus

Fig. 132 erhalten, da beide die vier Kreise: I. 1, 12, 8, 4, 15, 13, —, 3; II. 2; III. 5, 7, 10; IV. 6, 9, 11 bilden. Beide magische Quadrate hatten die Summenzahl dreißig. Das kleine magische Quadrat

7	—	5
2	4	6
3	8	1

mit der Summe 12 kann ebenfalls in die Normalform gebracht werden. Es bildet mit ihr die Kreise I: 7, 3, 5, 4, 2, —, 1, 7 und II: 8.

Will man eine Bozz-Puzzle-Aufgabe auf abgekürztem Wege lösen, so vertausche man, bis man am Ziele ist, Nummern, die sich auf Feldern von gleicher Färbung befinden.

12.

Allerlei Spiele.

In Frankreich hatte das Hofleben besonders unter Ludwig XIII. und XIV. die Entwickelung von Spielen begünstigt. Eine große Anzahl fähiger und gebildeter Damen und Herren verbrachten in den Schlössern und Landgütern der Großen ihre Tage und füllten die Zeit zwischen Schlafen und Essen, soweit sie nicht durch Kabalen und Liebesaffairen in Anspruch genommen waren, mit Karten-, Brett- und Geduldspielen. So konnte es nicht fehlen, daß bedeutende Mathematiker von Fach, wie Pascal, sich die theoretische Begründung und Entwickelung dieser Spiele sowie ihrer Chancen und Regeln angelegen sein ließen. Vor mir liegt ein Band in französischer Sprache aus dem Jahre 1724, welcher der Bibliothek des Astronomen Olbers entstammt und dessen Verfasser der Mathematiker M. de Montmort ist. Das Werk umfaßt mehr als 400 Quartseiten und behandelt wohl die meisten derjenigen Spiele, die im 17. und 18. Jahrhundert in den ersten Kreisen Frankreichs gespielt wurden. Pharao, Landsknecht (Lansquenet), Erwartungs- und Würfelspiele, ebenso eine Reihe von Hazardspielen werden ausführlich besprochen nnd mathematisch behandelt, auch ein Briefwechsel des Verfassers mit Vater und Sohn Bernoulli über diese Gegenstände ist beigefügt und beweist, wie angelegentlich erste Geister sich mit solchen Dingen beschäftigt haben. Wir wollen jene z. T. veralteten Spiele hier nicht weiter ausgraben, möchten aber doch einige Worte über Wahrscheinlichkeit und Erwartung sagen, da sie bei Würfelspielen und Lotterien, aber auch sonst im täglichen Verkehr eine nicht unbedeutende Rolle spielen. Wir lehnen uns dabei an die „Analysis“ von D. Spörer (Leipzig, Göschen 1896) an. Sind in einer Urne

5 weiße und 4 rote Kugeln, so ist die Wahrscheinlichkeit, eine weiße zu ziehen $\frac{5}{9}$, für die rote nur $\frac{4}{9}$. Die Wahrscheinlichkeit ist also ein echter Bruch, dessen Nenner die Anzahl aller Fälle, dessen Zähler dagegen die Zahl derjenigen enthält, die dem Eintreffen eines Ereignisses günstig sind. Für $w = 0$ ist das Eintreffen unmöglich, für $w = 1$ gewiß, für $w < \frac{1}{2}$ unwahrscheinlich und endlich für $w > \frac{1}{2}$ wahrscheinlich. Sind in der Urne außer den weißen und roten auch noch sieben schwarze Kugeln, so sind die Wahrscheinlichkeiten $w = \frac{5}{16}$, $r = \frac{1}{4}$, $s = \frac{7}{16}$. Wir sind daher berechtigt, zu erwarten, daß unter 16 Ziehungen 9 schwarze und rote sich befinden, dagegen 12 weiße und schwarze und 11 rote und schwarze, ohne daß diese Zahlen übrigens einzutreffen brauchen. Je größer die Zahl der Ziehungen ist, die man vornimmt, um so näher wird die Wirklichkeit der arithmetischen Wahrscheinlichkeit kommen. Darin beruht auch der Wert der Statistik, deren Ergebnisse häufig überschätzt werden. Es kommen bei solchen Fragen eine Reihe von „Imponderabilien“ mit in Betracht, deren Wirksamkeit nicht rechnerisch berücksichtigt werden kann; berechnet man also die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses nach statistischem Material, und das geschieht häufig im Leben und noch häufiger in der Politik, so werden meistens eine Reihe von wirksamen Faktoren nicht eingerechnet.

Nehmen wir an, es werde mit zwei Würfeln geworfen. Die Wahrscheinlichkeit, eine vorher bestimmte Zahl von 1—6 mit einem Würfel zu werfen, ist $\frac{1}{6}$, mit zwei Würfeln $2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$; es kann also bei drei Würfen erwartet werden, daß eine Vier z. B. dabei sei. Nun giebt es folgende Würfe mit zwei Würfeln (Fig. 133):

Fig. 133.

1|1	1|2	1|3	1|4	1|5	1|6
	2|2	2|3	2|4	2|5	2|6
		3|3	3|4	3|5	3|6
			4|4	4|5	4|6
				5|5	5|6
					6|6

Mit Ausnahme der Pasche kommen aber alle Würfe zweimal vor, so daß es 36 Würfe giebt. Die Wahrscheinlichkeit, Pasch zu werfen, ist $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$, jeder andere Wurf hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{18}$. Handelt es sich wie bei „Lustige Sieben" z. B. um die Höhe der Summe der Augen bei zwei Würfeln, so kommen die Summen 2 und 12 einmal, 3 und 11 zweimal, 4 und 10 dreimal, 5 und 9 viermal, 6 und 8 fünfmal, 7 aber am häufigsten, nämlich sechsmal vor, d. h. die Wahrscheinlichkeit Sieben zu werfen ist genau eben so groß, wie die Wahrscheinlichkeit für eine der vier Zahlen 2, 3, 11 oder 12 und auch eben so groß wie die für eine der Zahlen 4 und 10 zusammen. Darnach sind die theoretischen Gewinnverhältnisse leicht zu berechnen.

Bei einem Hazardspiel, wie das eben erwähnte, hängt das Ergebnis nicht von der persönlichen Geschicklichkeit des Spielers ab. Die Hauptfrage ist: wie viel darf der Spieler höchstens wagen, wenn er nicht verlieren will und wie groß sind die Aussichten, mit einem bestimmten Einsatz zu gewinnen. Setzt man bei der „Lustigen Sieben" z. B. auf die 8 oder 6, so hat man unter 36 Würfen 31 ungünstige. Es muß sich also der Einsatz zum Reingewinn verhalten wie 5 : 31 oder der Einsatz zum versprochenen Gewinn wie 5 : 36, also mehr als siebenfacher Gewinn muß erwartet werden. Die Sieben muß sechsfachen Gewinn versprechen, die 2 und 12 sechsunddreißigfachen, die 3 und 12 achtzehnfachen, die 4 und 10 zwölffachen, die 5 und 9 neunfachen.

Bei einem Spiel mit zwei Würfeln war die Zahl der Würfe $6^2 = 36$, bei einem solchen mit sechs Würfeln giebt es $6^6 = 46656$ Würfe. Unter dieser Anzahl haben wir nun diejenige herauszufinden, die für irgend eine Summe gilt. Sechsunddreißig kann nur einmal vorkommen, weil es nur eine Kombination giebt, für 35 giebt es bereits sechs Kombinationen, für 34 fünfzehn $= \frac{6 \times 5}{2}$ und so fort, wie das in einem andern Abschnitt erläutert worden ist. Erhebt man den Ausdruck $(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)$ auf die sechste Potenz, so giebt in der Antwort der Koeffizient jeder Potenz an, wie oft die Zahl des Exponenten geworfen werden kann.

So erhält man $252x^{11}$ und $756x^{13}$. Unter den 46656 möglichen Würfen befindet sich also 756 mal die Summe 13 und 252 mal die Summe 11. Hier der Beweis:

$$6+1+1+1+1+1=\frac{6!}{5!}\text{[1]} = 6 \text{ Arten}$$
$$5+2+1+1+1+1=\frac{6!}{4!} = 30 \text{ „}$$
$$4+3+1+1+1+1=\frac{6!}{4!} = 30 \text{ „}$$
$$4+2+2+1+1+1=\frac{6!}{2!\,3!} = 60 \text{ „}$$
$$3+3+2+1+1+1=\frac{6!}{3!\,2!} = 60 \text{ „}$$
$$3+2+2+2+1+1=\frac{6!}{3!\,2!} = 60 \text{ „}$$
$$2+2+2+2+2+1=\frac{6!}{5!} = 6 \text{ „}$$

252 Arten

$$6+3+1+1+1+1=\frac{6!}{4!} = 30 \text{ Arten}$$
$$6+2+2+1+1+1=\frac{6!}{2!\,3!} = 60 \text{ „}$$
$$5+4+1+1+1+1=\frac{6!}{4!} = 30 \text{ „}$$
$$5+3+2+1+1+1=\frac{6!}{3!} = 120 \text{ „}$$
$$5+2+2+2+1+1=\frac{6!}{3!\,2!} = 60 \text{ „}$$
$$4+4+2+1+1+1=\frac{6!}{3!\,2!} = 60 \text{ „}$$
$$4+3+3+1+1+1=\frac{6!}{3!\,2!} = 60 \text{ „}$$
$$4+3+2+2+1+1=\frac{6!}{2!\,2!} = 180 \text{ „}$$
$$4+2+2+2+2+1=\frac{6!}{4!} = 30 \text{ „}$$

---

[1] $\frac{6!}{5!}$ bedeutet $\frac{1\times2\times3\times4\times5\times6}{1\times2\times3\times4\times5}$; man spricht 6 Fakultät geteilt durch 5 Fakultät. In den Zähler kommt bei sechs Würfeln stets 6-Fakultät, in den Nenner dagegen die Fakultäten derjenigen Zahlen, die angeben, wie oft sich Zahlen wiederholen.

$$3+3+3+2+1+1=\frac{6!}{2!\,3!}= \quad 60 \text{ Arten}$$
$$3+3+2+2+2+1=\frac{6!}{2!\,3!}= \quad 60 \quad ,,$$
$$3+2+2+2+2+2=\frac{6!}{5!} \quad = \quad 6 \quad ,,$$

756 Arten

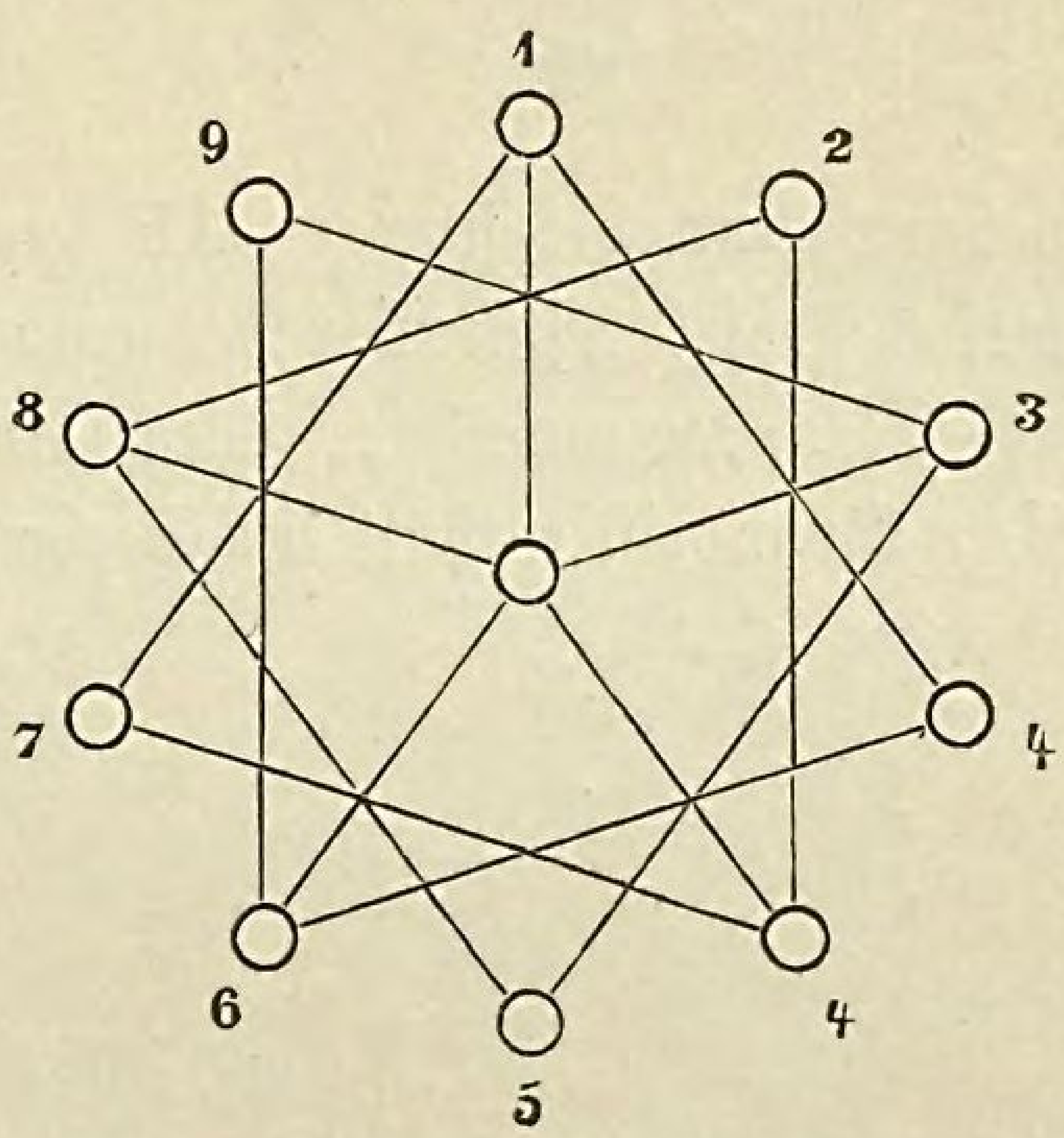
Bei dem Spiel mit sechs Würfeln muß ein Einsatz auf 6 oder 36, da diese nur einmal möglich sind, theoretisch 46656-fachen Gewinn versprechen, auf 7 oder 35 den 7776-fachen, auf 8 oder 34 etwa den 2220-fachen, auf 9 oder 33 etwa den 800-fachen, auf 10 oder 32 etwa den 350-fachen, auf 11 oder 31 den 170-fachen, auf 12 oder 30 den 100-fachen, auf 13 oder 29 den 60-fachen, schließlich auf 21 noch den zehnfachen Gewinn. Die Paare 7, 35 sind je 6mal vorhanden, 8, 34 je 21mal, 9, 33 je 21mal, 10, 32 je 56mal, 11, 31 je 252mal, 12, 30 je 456mal, 13, 29 je 756mal, 14, 28 je 1161mal, 15, 27 je 1665mal, 16, 26 je 2247mal, 17, 25 je 2856mal, 18, 24 je 3431mal, 19, 23 je 3906mal, 20, 22 je 4221mal und 21 am häufigsten, nämlich 4334mal. Immerhin müßte für diese Zahl noch der mehr als zehnfache Gewinn bezahlt werden. Natürlich wird bei den wirklichen, praktisch üblichen Spielplänen bei den zuletzt genannten Wurfzahlen überhaupt kein Gewinn mehr bezahlt — sie sind Nieten. Bei den meisten Würfelspielen, die auf 8 Würfel eingerichtet zu sein pflegen, kann der Spielhalter unter der Annahme, daß $8^8 = 2^{24} = 10\,777\,216$ Spiele gemacht werden, 50 % des Einsatzes oder noch mehr gewinnen.

Lucas behandelt in seinem Werke das berüchtigte **Rouge et noir** und **Baccarat**. Wir glauben aber annehmen zu dürfen, daß diese Spiele in Deutschland heutzutage nur noch wenig und nur in gewissen Kreisen gespielt werden. Anders liegt der Fall mit einer Reihe von Spielen, die sich recht gut für kleine Geselligkeiten und vielleicht auch für die heranwachsende Jugend eignen, um so mehr, als das Spielbrett nach einfachen Angaben angefertigt und als Spielsteine die Steine irgend eines anderen Spiels benutzt werden können. Wir empfehlen diese Geduldspiele daher besonders allen denen, die sich damit beschäftigen, der Jugend in Zeitschriften und Wochen-

blättern Unterhaltung und Anregung zu bieten. Eine Fülle von leichten Problemen bietet jedes Spiel dar.

Bekanntlich ist bei dem vor reichlich zehn Jahren so viel gespielten, jetzt aber fast vergessenen Bozz-Puzzle, welches wir im vorigen Kapitel behandelt haben, die Hälfte der Spiele unmöglich, da man die beiden letzten Steine nicht in die vorgeschriebene Ordnung bringen konnte. Es erhöht natürlich den Reiz des Spieles, wenn man ohne Prüfung weiß, daß auf alle Fälle eine Lösung möglich ist, und diesen Gedanken hat der Franzose Fleury erfaßt, um eine Reihe von Spielen zu erfinden, die sämmtlich mit dem Bozz-Puzzle Aehnlichkeit haben, jedoch stets eine Lösung und auch eine gefällige Form haben. Ein solches Spiel ist „Die wunderbare Rose", deren Grundfeld in Fig. 134 dargestellt ist. Es wird mit zehn einfarbigen Nummern gespielt, die die Zahlen von 1 bis 9 so tragen, daß die Vier doppelt vorkommt. Man vermutet sofort mit Recht, daß das zweimalige Vorkommen dieser Zahl der Grund für die Möglichkeit aller Fälle ist. Die Steine werden in beliebiger Reihenfolge auf die Plätze gestellt und sollen auf den Verbindungslinien unter Benutzung des leeren Feldes so lange geführt werden, bis sie die richtigen Plätze erhalten haben.

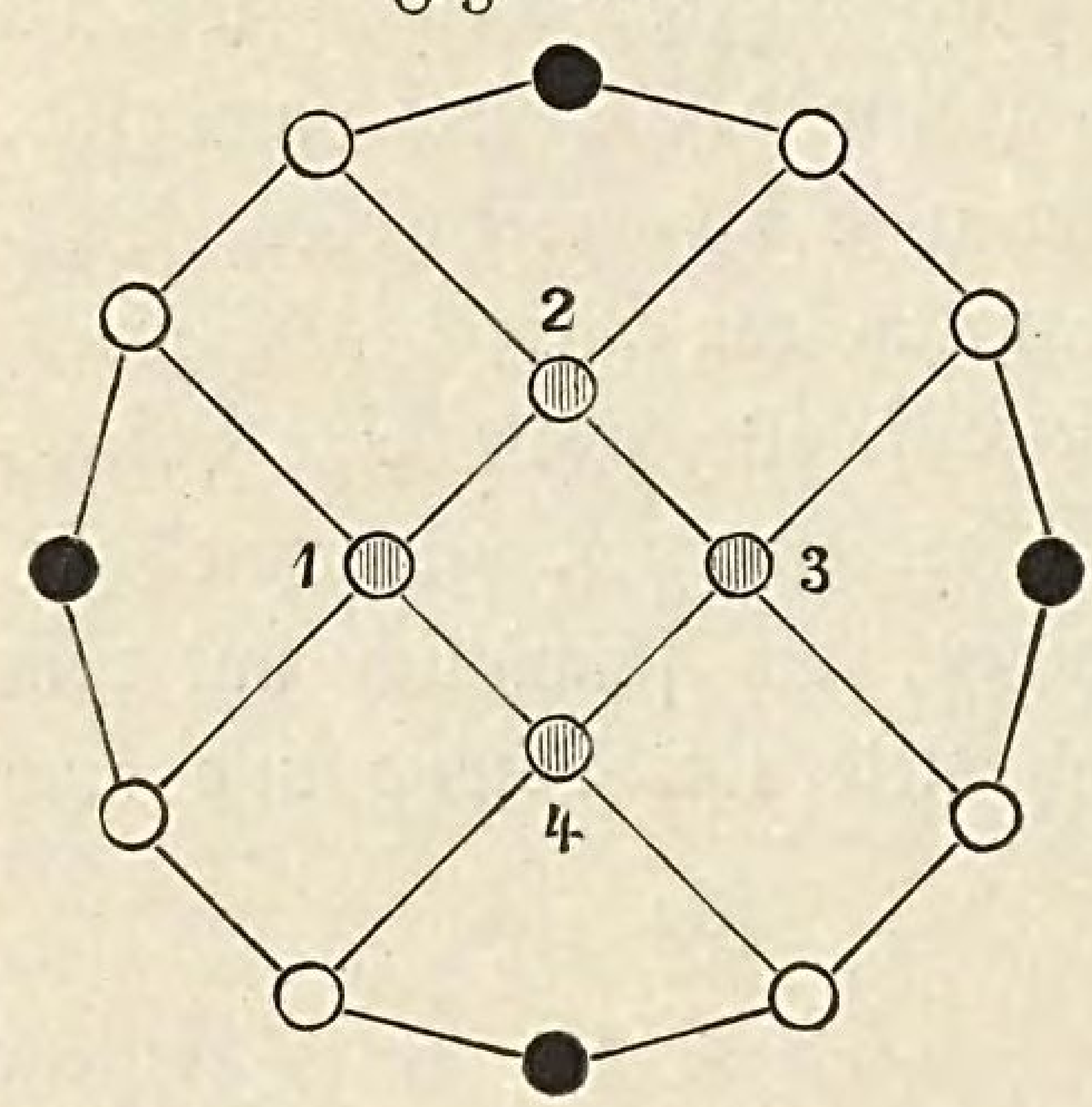
Fig. 134.



Ein anderes Spiel dieser Art stellt die Fig. 135 dar. Es erfordert 16 Steine. Acht rote haben die Nummern 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 12; vier gelbe die Nummern 1, 2, 3, 4 und eben so viele grüne die Nummern 1, 4, 7, 10. Die gelben Steine sollen in die Mitte gebracht werden, die übrigen in der natürlichen Reihenfolge der Zahlen auf den Kreis. Einer der gelben Steine wird aufgehoben. Man kann sich nun entweder auf dem Kreise oder in dem Quadrat 1, 2, 3, 4 ein leeres Feld verschaffen. In ersterem Falle ist es möglich, die äußeren Steine zirkuliren zu lassen, um sie mittelst der Diagonalzüge einzuschieben, im letzteren Falle die inneren,

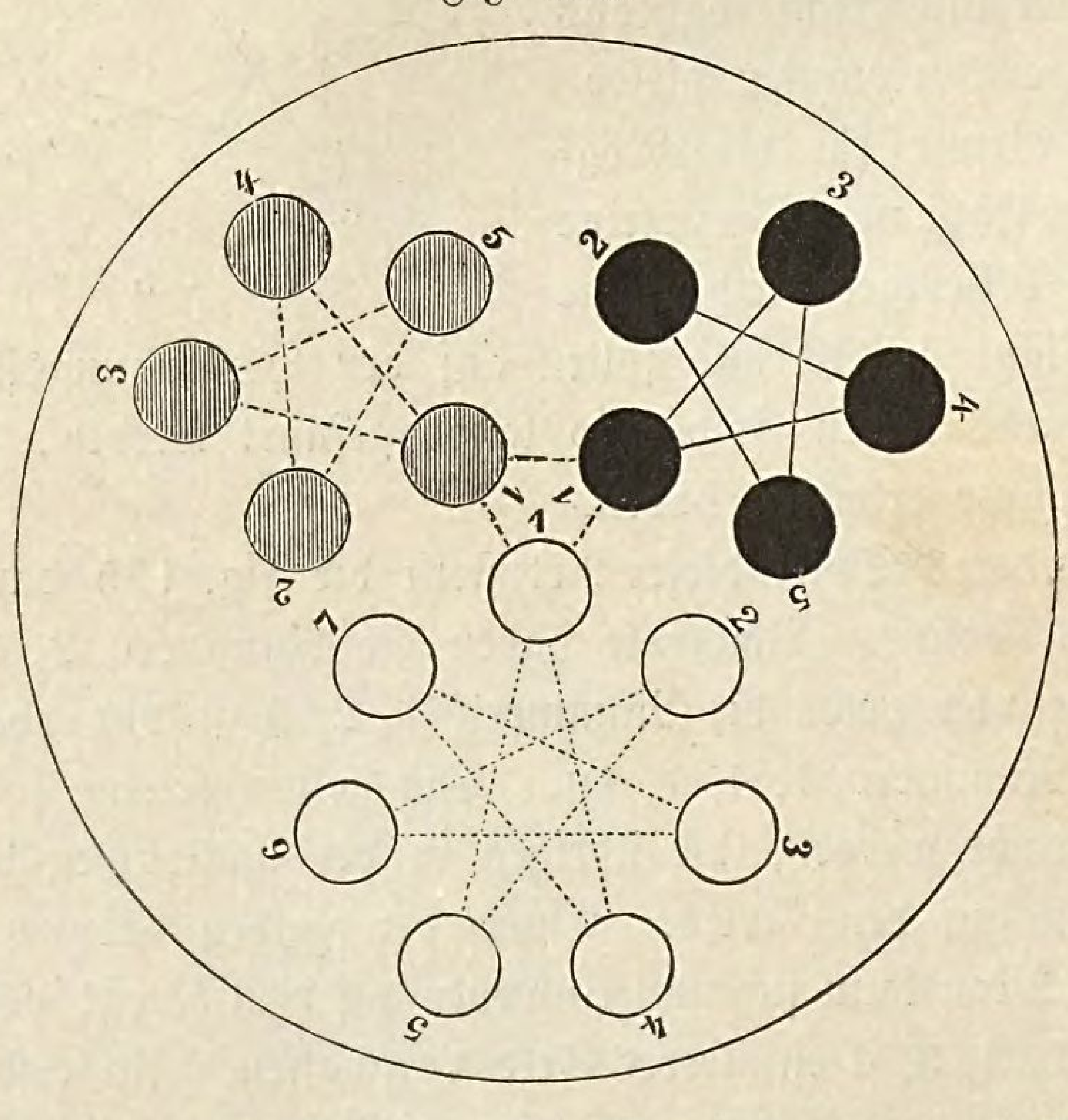
um dorthin von außen her einen Stein zu führen, der uns der Lösung näher bringt. Es ist nun wohl zu beachten, daß, wenn man mit einem grünen Felde beginnt, die Lösung zwar unmöglich werden kann, aber sofort möglich wird, wenn man mit dem folgenden grünen Felde beginnt. Das erwartet man von vorherein nicht, da die Figur symmetrisch ist in Bezug auf das mittlere Quadrat. Ebenso auffallend ist es, daß man unmögliche Fälle erhalten würde, wenn man statt eines grünen etwa einen gelben oder roten Stein fortnehmen und die übrigen 15 verschieben würde. Fleury hat daher dieses Spiel „Paradoxal" genannt.

Fig. 135.



Das „wunderbare Kleeblatt" ist in der Fig. 136 dargestellt. Der Grundriß enthält ein Siebeneck und zwei Fünfecke mit gewissen

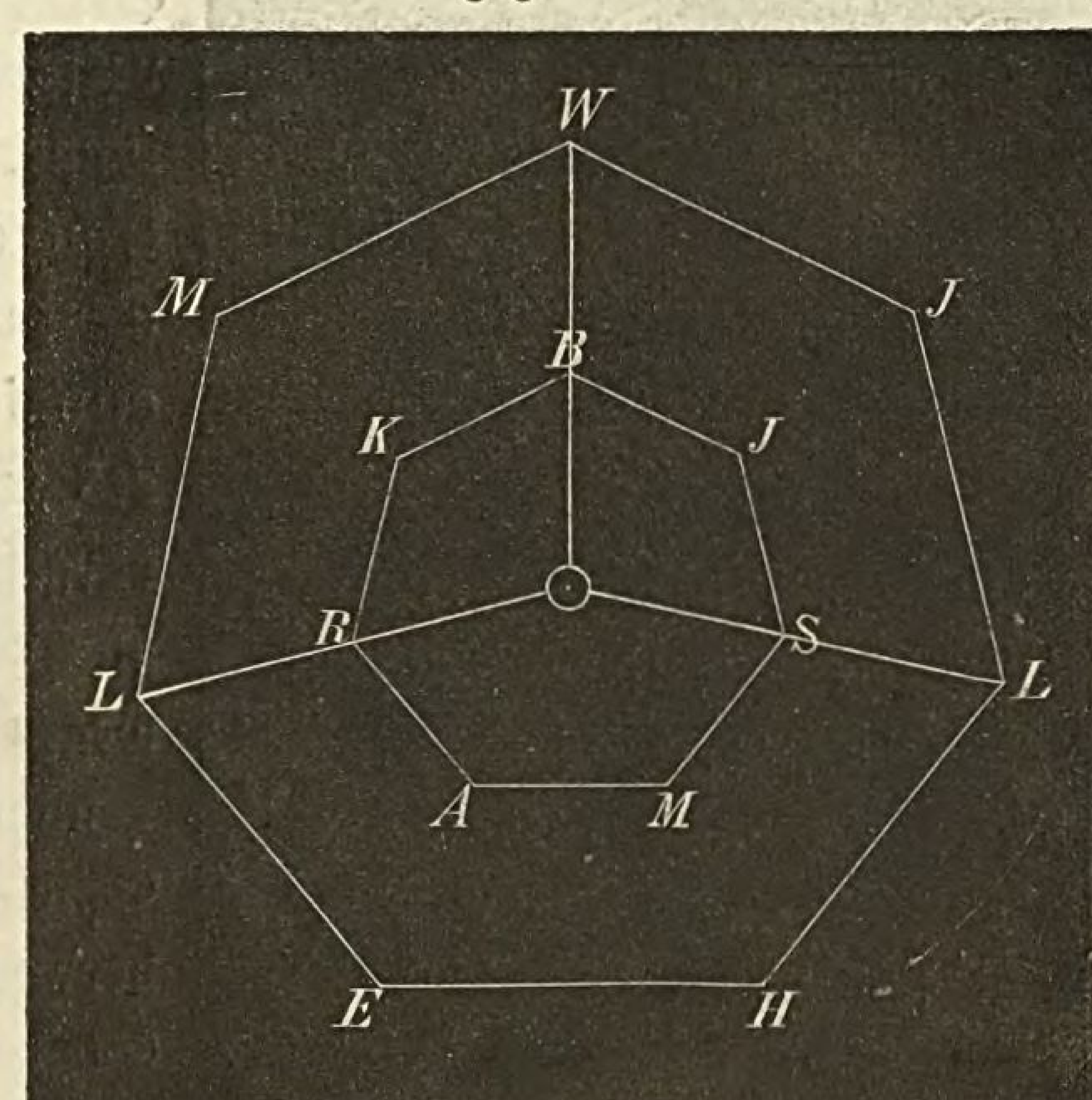
Fig. 136.



Diagonalen als Zugstraßen. Die Farben der drei Vielecke sind verschieden, ebenso die dazu gehörigen und mit Nummern versehenen

siebzehn Steine. Sieben erhalten die Nummern 1—7, je fünf die Nummern 1—5. Die 17 Steine werden zu Anfang des Spieles beliebig auf Plätze gesetzt, darauf zwei von den sieben gleichfarbigen fortgenommen und es sollen dann die 15 übrigen unter Benutzung der leeren Felder in die richtige Ordnung gebracht werden. Man wird aber wohl daran thun, als Vorübung eine Reihe von Zügen auf jedem der drei Blätter vorzunehmen, um die Zugstraßen genau kennen zu lernen. Es würde uns zu weit führen, wenn wir die Regeln dieser Spiele weiter entwickeln würden. Wer das Interesse und die Geduld dazu hat, sich selbst den Grundriß zu zeichnen, den werden diese Tugenden auch bei weiteren Versuchen nicht verlassen. In Deutschland sind solche Spiele nicht käuflich, in Frankreich scheinen sie, besonders für die heranwachsende Jugend, viel gekauft zu werden. Besonders das ähnliche Spiel „Frankreich und Rußland" von demselben Erfinder scheint zur Hebung des Nationalgefühls der französischen Jugend sich eifriger Pflege zu erfreuen. Die Fig. 137 stellt den Grundriß dar. Sechs rote und sechs gelbe Steine mit den betreffenden Buchstaben **FRANCE** und **RUSSIE** gehören dazu. Sie werden in ganz beliebiger Ordnung aufgestellt und sollen durch Verschiebung auf den gezeichneten Linien mit Hilfe des leeren Feldes in die richtige Ordnung der erkennbaren Waffenbrüderschaft beider Länder gebracht werden. Die Lösung ist auf alle Fälle möglich. Ich schlage vor, dieses Spiel bei uns mit den Namen unseres edlen ersten Kaisers und seines großen Kanzlers zu spielen. Die Namen „Wilhelm" und „Bismarck" haben je sieben Buchstaben. Wir müßten also statt der Sechsecke Siebenecke zeichnen und die Zugstraßen etwa so wählen,

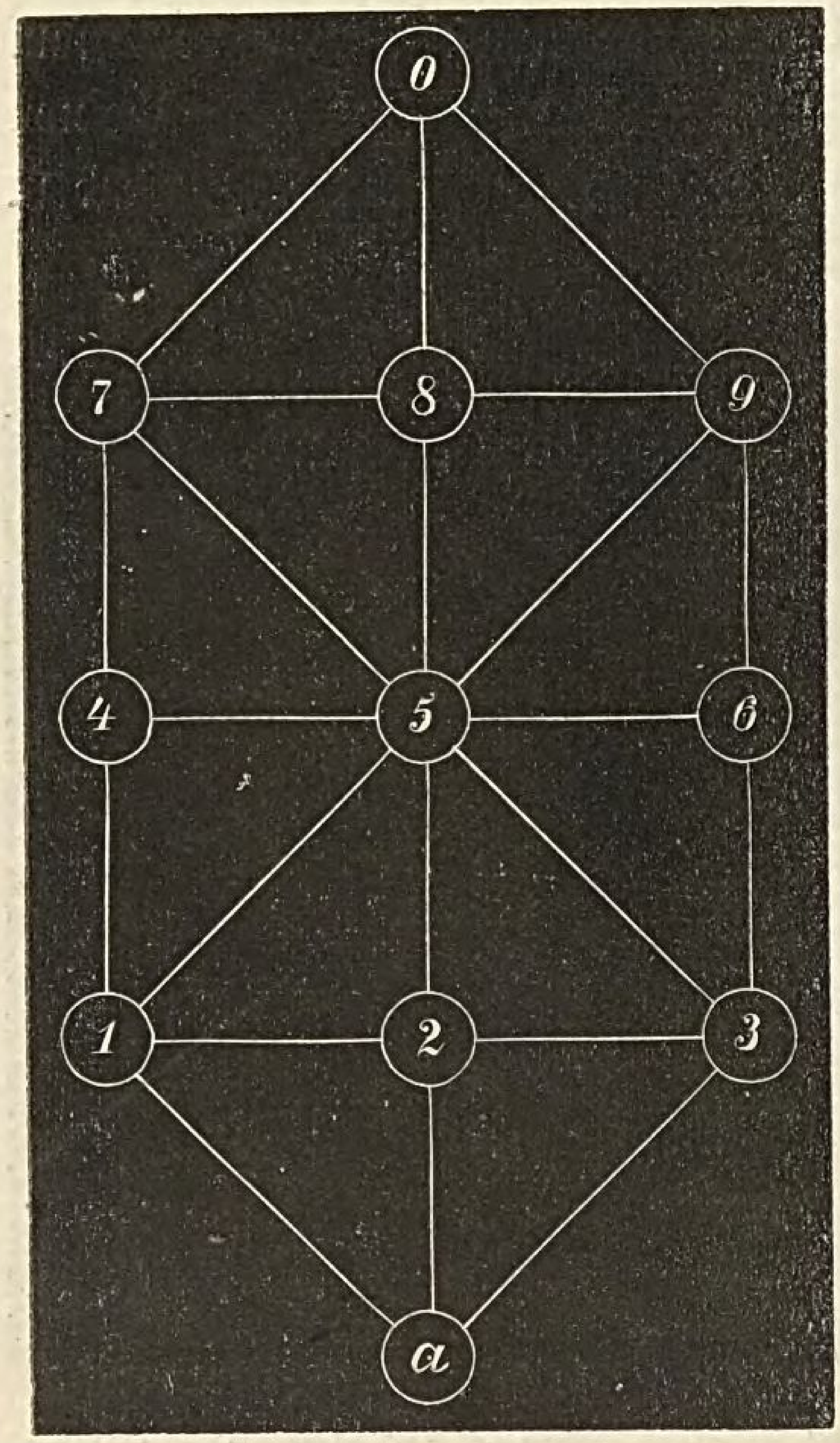
Fig. 137.



wie die Figur zeigt. Das leere Feld befindet sich zum Schluß in der Mitte.

Wir wollen jetzt zwei Spiele erörtern, die besonders gern von jungen Leuten gespielt werden, die militärische Neigungen haben. Es wird von zwei Spielern gespielt, die sich gegenseitig bekriegen. Lucas sagt: „Le jeu donne une idée des manoeuvres stratégiques employées par trois brigades de cavalerie, pour couper de ses communications un corps d'armée qu'elles harcèlent.“ Der Erfinder hat für diejenigen, welche ebensoviele oder mehr Spiele gewinnen als er, 100 bis 1000 Franken Belohnung ausgesetzt. Dazu bemerkt Lucas, daß man sich in einigen Stunden zum Herrn des Spieles machen und die versprochene Belohnung verdienen könne. „Mais il s'agit de trouver l'adresse du banquier; c'est un problème plus difficile, que le précédent.“ Der Plan des Spieles ist in der Fig. 138 dargestellt; die Nummern sind nur einer leichteren Orientirung wegen hinzugefügt und beim Spiel nicht vorhanden. Der eine Spieler hat drei weiße Steine, der zweite Spieler hat einen Stein von anderer Farbe. Berechnen wir zuerst die Zahl der verschiedenen Stellungen. Die Anzahl der Stellungen für die drei weißen Steine ist, da elf Felder vorhanden sind, gleich der Anzahl der Kombination von elf Elementen zu je drei genommen, also $\frac{11 \times 10 \times 9}{1 \times 2 \times 3} = 165$. Da nun der vierte Stein zu jeder dieser Stellungen acht verschiedene einnehmen kann, so ist $8 \times 165 = 1320$ die Zahl sämmtlicher Stellungen. Die zweiundzwanzig Zugstraßen zwischen den Etappen

Fig. 138.



bilden zwölf gleichschenklige Dreiecke. Nach einer vorher festgesetzten Zahl von Etappen gilt das Spiel für beendet.

Zunächst beachte man, daß die Axe ao eine Symmetrieaxe ist. Man kann also sämmtliche Stellungen, die wir hier betrachten werden, sich symmetrisch zu ao umgelegt denken und dann dieselben Schlüsse machen, wie vorher. Folgende Stellungen merke man sich wegen der wichtigen Folgerungen, die sich aus ihnen ergeben. Stehen die weißen (A) auf 7, 5, 9, der schwarze auf 0, so gewinnt Weiß beim Anspiel in einem Zuge. Stehen die weißen (B) auf 1, 5, 8, der schwarze auf 4, so gewinnt Weiß beim Anspiel wieder in einem Zuge. Stehen die weißen (C) auf 7, 9 und einer der Nummern 1, 2, 3, 4, 6, der schwarze auf 8, so gewinnt Weiß, falls es weiter spielt, in zwei Zügen. Steht Weiß (D) auf 5, 6, 7, Schwarz auf 8, so gewinnt Weiß in zwei Zügen. Steht Weiß (E) auf 5, 7 und einer der Nummern 1, 2, 3, 4, 6, Schwarz dagegen auf 0, so gewinnt Weiß, wenn es anspielt, in drei Zügen. Steht Weiß (F) auf 1, 5, 9, Schwarz auf 7, so gewinnt Weiß in drei oder vier Zügen. Die folgende Tabelle (Fig. 139) enthält unter Berücksichtigung der Symmetrie alle Spiele. *Falls Weiß anspielt, gewinnt es stets und zwar in höchstens zwölf Zügen.* Die Buchstaben am Ende jeder Reihe weisen auf denjenigen der eben beschriebenen Typen hin, auf welchen das Spiel führt. Bei einem Stern (*) ist die Partie abgebrochen, da man dann an eine in der Tabelle bereits dagewesene Stellung gelangt ist. Je vier Zahlen bilden eine Gruppe zu je drei Steinen (z. B. 123) und einem (z. B. 4), welche die weißen bzw. den schwarzen Stein bedeuten.

Das „Festungsspiel" wird mit vierzehn zur Hälfte schwarzen und zur Hälfte roten Steinen gespielt. Der Grundriß ist in Fig. 140, auf der Tafel am Schlusse des Buches, dargestellt. Sie enthält zwei Forts mit zwei durch eine Brücke verbundenen Thoren. Die übrigen sieben Thore sind gleichmäßig in den Ecken der Festungsmauern verteilt und das Spiel stellt folgende einzelnen Probleme. I. In die linke Festung sollen durch das Thor die sieben schwarzen Steine über die punktirten Linien auf die Nummern 1 bis 7 geschoben werden. II. Dieselben Steine sollen aus dem Thor P heraus- und durch P′ in die rechts belegene Festung auf die Plätze

1′ bis 7′ geschoben werden. III. Die in I beschriebene Operation soll mit den roten Steinen ausgeführt werden und IV. sollen nach Fortnahme eines Steines die roten Steine durch Ein- und Aus-

Fig. 139. Tafel für sämmtliche Lösungen des Belagerungsspieles.

123	4 135	7 345	8 357	0 E			
				9 F			
			0 349	7 459	8 D		
					0 E		
				8 359	7 259	4 159	7 F
						8 159	7 F
							0 E
						0 E	
	7 125	4 135*					
		8 135	7 345*				
			0 138	7 158	4 B		
					0 258	7 259*	
		0 129	7 259*				
			8 159*				
	8 135*						

schieben längs der Brücke und der punktirten Linien vertauscht werden. Zunächst geht aus der Symmetrie des Planes hervor, daß die ersten drei Probleme in Wirklichkeit nur eins enthalten. Für die Lösung desselben beachte man folgende Zugregel: P 1 2 3, P 1 2, P 1, P 7 6 5 4, P 7 6 5, P 7 6, P 7. Es sind demnach für I bis III je sechszehn Züge erforderlich. Die Reihenfolge der besetzten Felder ist hier 3, 2, 1, 4, 5, 6, 7; nimmt man dagegen

die Folge 2, 1, 3, 4, 5, 6, 7, so sind 18 Züge nötig. Giebt man den Festungen die Form eines Polygons von größerer Seitenzahl, so ist die Zahl der Züge im Minimum folgende: bei einer geraden Anzahl von 2 n Steinen n (n + 1) Züge, bei einer ungeraden Anzahl von (2n + 1) Steinen $(n + 1)^2$.

Für die Lösung des vierten Problems wollen wir annehmen, daß der Stein 7′ fortgenommen würde. Ist es ein anderer, so kann man leicht die Lösung dementsprechend verändern. Man führe nun 1 über die Brücke nach 7′, schiebe dann links alle übrigen Steine um eine Nummer zurück, damit 7 frei wird. Auf diesen Platz führt man 1′. So fährt man fort, bis der Wechsel beendet ist. Es sind im Ganzen 85 Züge erforderlich, entsprechend der Formel $[2n \times (n - 1)] + 1$, wenn n die Zahl der Steine jeder Festung bedeutet.

In Spanien wird auf dem gewöhnlichen Schachbrett viel gespielt das Spiel „Gänsefuß.“ Den Namen verdankt es vermutlich dem Umstande, daß die Stellung der vier auf dem Brette in Benutzung kommenden Steine eine ähnliche Form haben, wie der Eindruck eines Gänsefußes auf dem Erdboden. Von zwei Mitspielern führt der eine 3 schwarze Steine, der andere einen weißen und zwar alle vier auf den weißen Feldern des Brettes gemäß den Regeln des Damespiels, d. h. in Richtung der Diagonalen. Wir wollen uns bei der weiteren Erläuterung der Felderbezeichnung von Vandermonde bedienen, wie sie bereits früher[1]) wiedergegeben ist. Es läßt sich nun zeigen, daß unter allen Umständen der Spieler der drei Steine siegt, es sei denn, daß der weiße Stein im Anfang auf eines der Felder 11 bis 88 der großen Diagonale gesetzt wird. In diesem Falle kann die Partie bei einiger Aufmerksamkeit resultatlos verlaufen. Ein schwarzer Stein besetzt demnach sofort die große Diagonale (11—88) und es werden dann zwei Steine auf die Felder 44 und 46 gesetzt. Da die nächst günstigste Stellung des weißen Steines die Diagonale 31 bis 86 ist, so setze man den dritten schwarzen Stein auf 53, so daß von den drei

[1]) Die Figur findet sich beim Mühlespiel, nur muß man sich den Rand fortdenken, da nur 64 Felder benutzt werden; es bleiben also die Felder 11 bis 88. Figur 123 auf Seite 159.

schwarzen Steinen die Felder 44, 46, 53 besetzt sind. Da die weißen Steine nur auf einer bisher unbesetzten Diagonale aufgestellt werden können, so bleiben für sie nur die Felder 48, 84, 15, 51 übrig. Im ersten Falle spielen die schwarzen 44 auf 33, im zweiten 44 auf 66, sodaß jetzt die drei schwarzen Steine in den Ecken eines gleichschenkligen Dreiecks stehen. Nehmen wir nun an, daß schwarz von 46 auf 24 zieht, so hat die weiße Dame nur folgende drei Möglichkeiten:

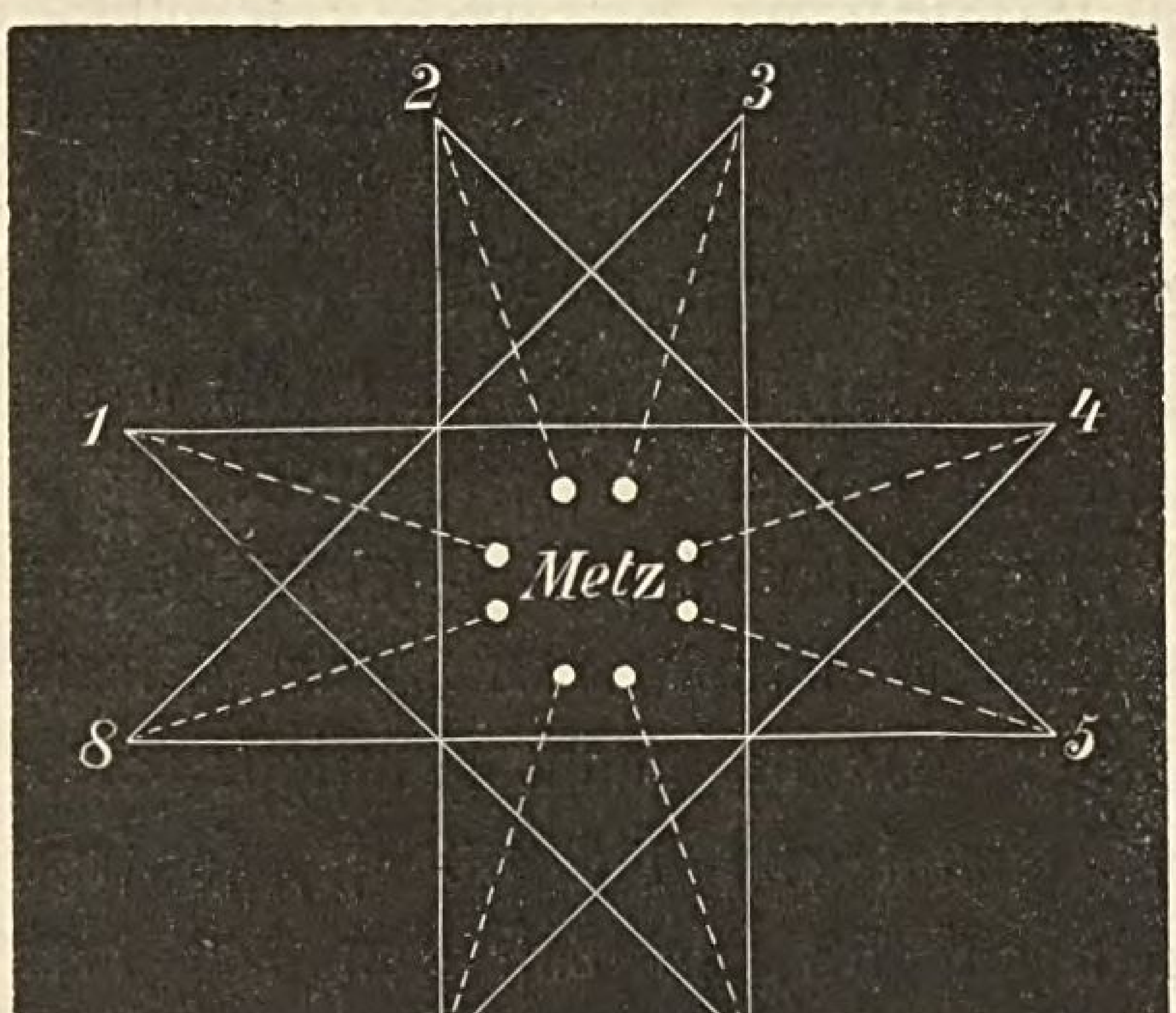
1. Weiß zieht 48 auf 37. Dann folgt Schwarz mit 53 auf 26 und mit 33 auf 51. Weiß ist gefangen.

2. Weiß zieht 48 auf 15; Schwarz folgt mit 53 auf 44, Weiß auf 37 oder 48; dann zieht Schwarz 44 auf 26 und 33 auf 51 und gewinnt ebenso, wie vorher.

3. Weiß zieht 48 auf 84; Schwarz folgt mit 53 auf 26 und mit 24 auf 15. Wieder ist Weiß gefangen.

Wir hatten hierbei angenommen, daß der weiße Stein von den vier möglichen Stellungen die Stellung 48 erhielt. Man erhält durch Symmetrie ähnliche Lösungen für die Annahme, daß Weiß auf 84, 15 oder 51 gesetzt werde. Im Uebrigen empfiehlt sich das Spiel durch seine interessanten Kombinationen. Weiß hat verloren, sobald es keinen Zug mehr machen kann, ohne mit einem der schwarzen Steine auf dieselbe Diagonale zu kommen.

Fig. 141.

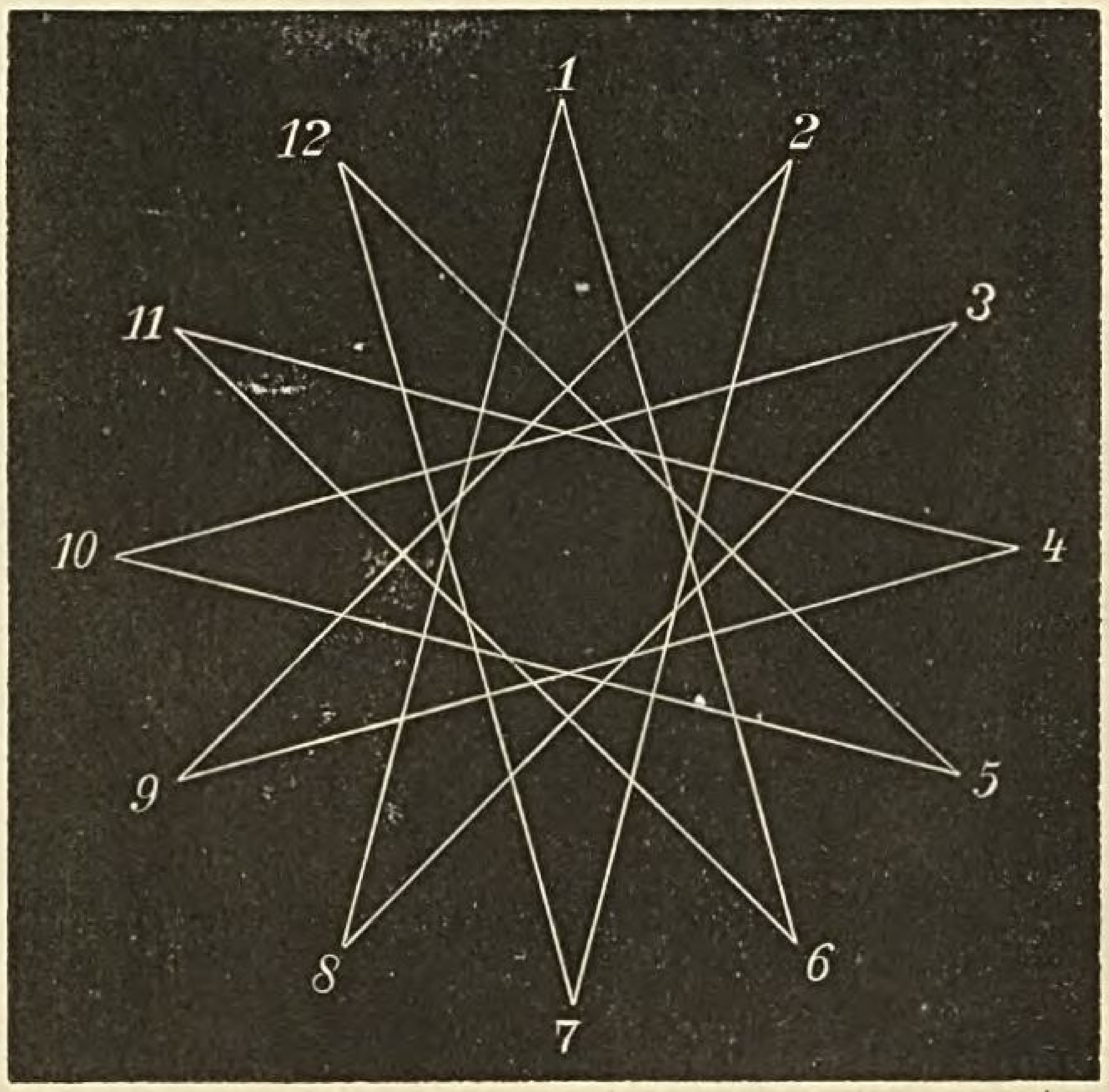


In Buffalo (N. Y.) hat Knowlton 1883 folgendes kleine Spiel veröffentlicht, welches in Amerika viel Beifall gefunden hat. Ein achteckiger Stern hat die Form und die Verbindungslinien der Fig. 141 ohne die nach dem Mittelpunkt führenden Linien. Es handelt sich darum, sieben Steine so aufzustellen, daß man immer von einem leeren Felde ausgehen und den

Stein in gerader Linie und in einem Zuge auf sein Feld bringen muß. Der Erfinder hatte einen Geldpreis für die in möglichst wenig Worten gegebene Lösung ausgesetzt. Sie lautet: „Man gehe stets auf dasjenige Feld, von dem man zuletzt ausgegangen war.“ Schieben wir von 4 aus z. B. den ersten Stein auf 1, so muß man den nächsten Stein auf 4 setzen, den folgenden daher auf 1 oder 7 und so fort, so erhalten wir die Lösung.

Beachtet man, daß die Zugstraßen stets zum dritten Punkte gehen, so kann man das Spiel verallgemeinern. Man markire auf dem Umfange eines Kreises 4n Punkte, verbinde stets nach dem (n — 1)-sten, so müssen in der vorgeschriebenen Art (4n — 1)-Steine aufgestellt werden. Man kann dabei noch die Bedingung hinzufügen, daß der letzte Stein auf ein vorher bestimmtes Feld gesetzt werden muß. Sei dies die Nummer p, wenn die Zahlen in natürlicher Folge auf den Umfang des Kreises geschrieben werden, so hat man beim ersten Zuge mit dem (p ± 2)-ten Felde zu beginnen und nach dem [p ± (2n — 3)]-ten Felde zu schieben. Soll in unserem Falle z. B. der letzte Stein auf 7 geschoben werden, so schiebe man anfangs vom fünften auf das achte Feld und bediene sich dann der früheren Regel. Eine Abänderung dieses Spieles ist in derselben Figur dadurch hervorgerufen, daß von jeder

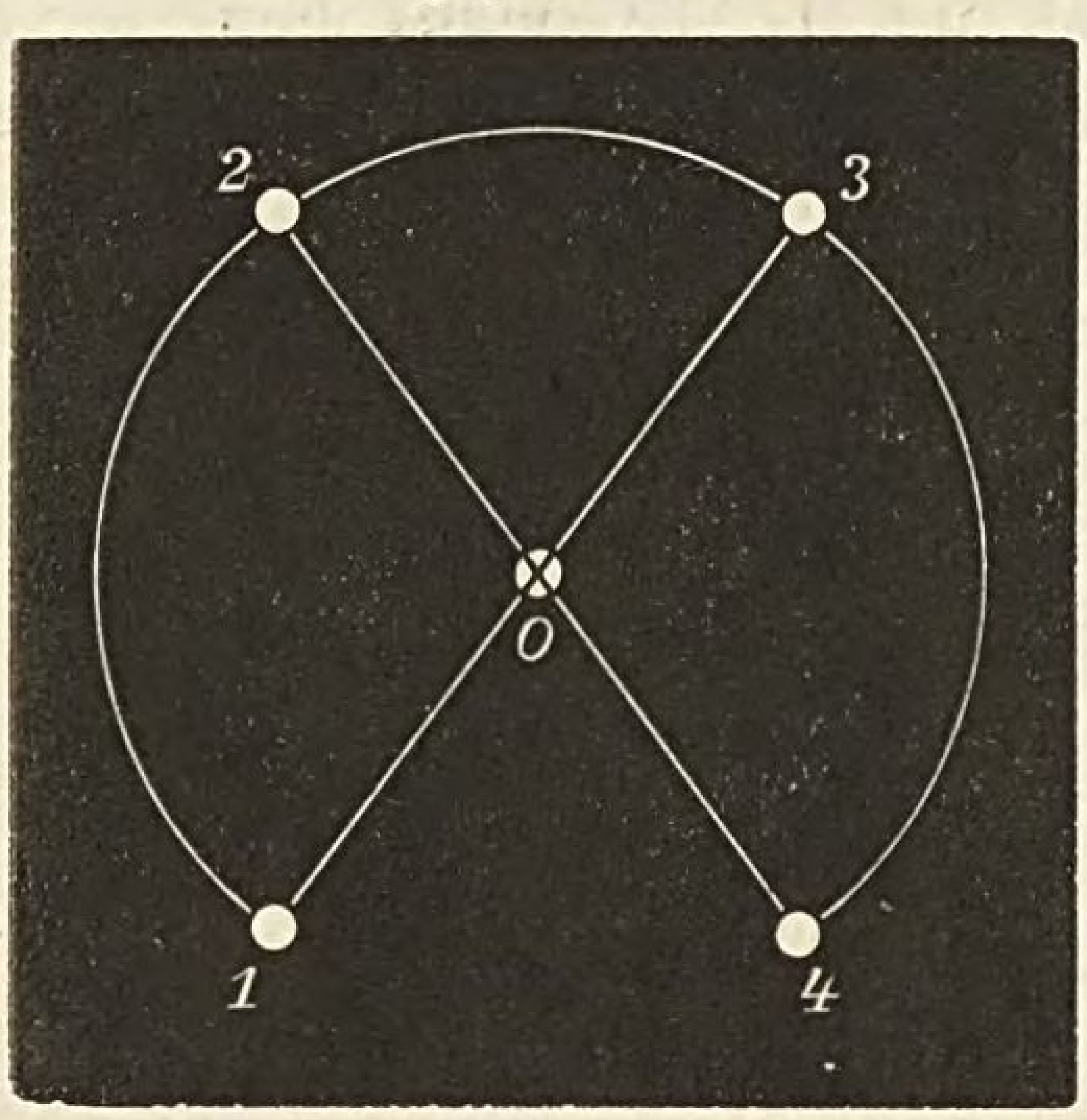
Fig. 142.



Ecke nach dem Mittelpunkt eine punktirte Linie gezogen ist. Von der Festung Metz aus sind acht Armeen der Vorschrift gemäß auf den Umfang zu führen, wobei dieselbe Vorschrift, wie vorhin, zu beachten ist. Die Spielregel ist dann auch dieselbe und der letzte Stein hat nur eine kurze Linie zu durchlaufen, d. h. er wandert direkt vom Innern auf seinen Platz. Bei dem Uhrspiel (Fig. 142) tragen

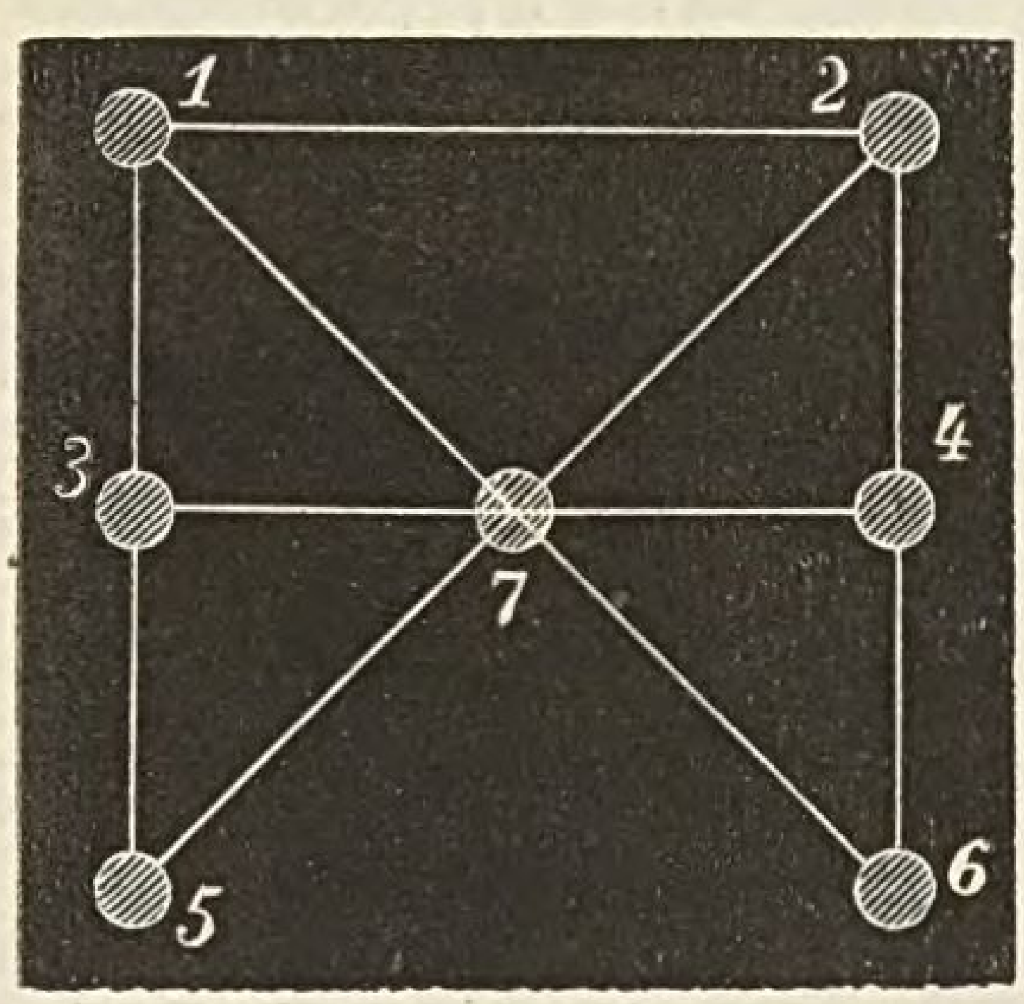
12 Steine die Nummern von 1 bis 12. Man läßt einen beliebigen Stein fortnehmen, bringt die anderen Nummern an ihre richtigen Plätze nach der obigen Vorschrift und Regel und setzt dann den letzten Stein zum Schluß an seinen Platz. Wenn der p-te Stein fortgenommen ist, dann muß der $(p + 2n - 1)$-ste Stein zuletzt aufgeschoben werden; daher beginnt man beim $(p + 2n + 1)$-sten Felde zu schieben und zwar nach dem $(p - 4n + 2)$-ten Felde. Ist demnach der zehnte Stein fortgenommen, so muß der dritte zuletzt aufgeschoben werden. Man muß also mit dem fünften Felde beginnen und auf das zwölfte zuerst schieben. Die Zahl 4n ist hier 12.

Fig. 143.



Im Elsaß findet man das „Hufeisenspiel" sehr verbreitet. Der Plan wird, wie die Fig. 143 zeigt, von einem Kreisbogen und zwei Durchmessern gebildet, durch deren Schnittpunkt und vier Endpunkte fünf Felder gebildet werden. Zwei Spieler setzen jeder abwechselnd zwei Steine von paarweise verschiedener Farbe. Die Partie ist bei diesem harmlosen Spiel verloren, sobald ein Spieler nicht mehr ziehen kann. Es möge von den beiden Farben weiß und schwarz weiß stets den ersten Zug haben. Die weißen Steine können auf zehn verschiedene Arten aufgestellt werden $\left(\frac{5 \times 4}{1 \times 2} = 10\right)$; doch reduziren sich diese auf 6 in Folge der Symmetrie zur Axe des Hufeisens. Zu jeder dieser 6 Stellungen gehören drei Stellungen der schwarzen Steine $\left(\frac{3 \times 2}{1 \times 2} = 3\right)$; von den 18 so erhaltenen Anfangsstellungen sind jedoch vier symmetrisch, wodurch sich die Zahl auf 16 reduzirt, die wir in Folgendem

Fig. 144.



wiedergeben. Die zuerst genannten Nummern gehören den weißen Steinen:

A 10; 23. B 10; 24. C 10; 34. D 02; 13.
E 02; 14. F 02; 34. G 12; 03. H 12; 04.
J 12; 34. K 13; 02. L 13; 24. M 13; 04.
N 14; 02. O 14; 23. P 23; 01. Q 23; 14.

Von diesen 16 Stellungen bleiben, falls kein Fehler gemacht wird, 13 unentschieden; von den übrigen drei Stellungen gewinnt weiß C und J, schwarz G.

Dieses Spiel hat Aehnlichkeit mit dem kleinen Mühlespiel, wenn man eine Seite und die beiden Mittellinien unterdrückt. Abwechselungsreicher und, wie ich weiß, für Kinder recht interessant ist ein Mühlespiel, wie es in Fig. 144 abgebildet ist. Hier ist eine Seite und die dazu senkrechte Mittellinie fortgelassen. Jeder der beiden Spieler erhält drei Steine etwa von schwarzer und weißer Farbe. Die Steine werden abwechselnd gesetzt und gezogen. Nehmen wir wieder an, weiß beginne, so hat es 35 Anfangsstellungen $\left(\frac{7 \times 6 \times 5}{1 \times 2 \times 3}\right) = 35$. Von diesen sind 32 paarweise symmetrisch zur Axe und die übrigen 3 haben für sich symmetrische Stellungen zur Axe. Bei diesen letzteren giebt es auf den vier übrig bleibenden Feldern zwei verschiedene Stellungen für schwarz, während die übrigen 16 je vier verschiedene Stellungen zulassen. Demnach giebt es 70 $(4 \times 16 + 6)$ verschiedene Spiele, von denen 37 bei richtigem Spiel unentschieden bleiben, während Weiß, welches beginnt, 21 und Schwarz 12 Spiele gewinnen kann. Das Verhältniß ist also günstiger, als beim vorigen Spiel.

Wir wollen in Kürze wieder die Anfangsstellungen wenigstens derjenigen Spiele aufschreiben, welche zum Siege führen; wir nennen zuerst die Stellungen desjenigen, der ansetzt:

A 135; 246. B 135; 746. C 235; 146. D 235; 746.
E 345; 126. F 356; 124. G 356; 127. H 357; 246.
J 125; 346. K 125; 467. L 157; 346. M 157; 246.
N 245; 367. O 257; 146. P 567; 126. Q 123; 456.
R 457; 126. S 126; 467. T 137; 456. U 137; 456.
V 127; 356.

In allen diesen Stellungen muß derjenige, welcher zuerst angesetzt

hat, gewinnen, falls er keinen Fehler macht. In den nächsten zwölf dagegen gewinnt der zweite Spieler.

A 1 3 5; 2 4 7. B 1 3 5; 2 6 7. C 2 3 5; 1 4 7. D 3 4 5; 1 2 7. E 3 4 5; 1 6 7. F 3 5 6; 1 4 7. G 3 5 7; 1 2 4. H 3 5 7; 1 2 6. J 3 5 7; 1 4 6. K 1 2 5; 3 4 7. L 1 2 3; 4 5 7. M 1 2 7; 3 5 6, Alle übrigen Anfangsstellungen bleiben unentschieden. Es kommt aber sehr oft vor, daß solche Partien durch eine kleine Unachtsamkeit eines der Spieler doch zur Entscheidung führen.

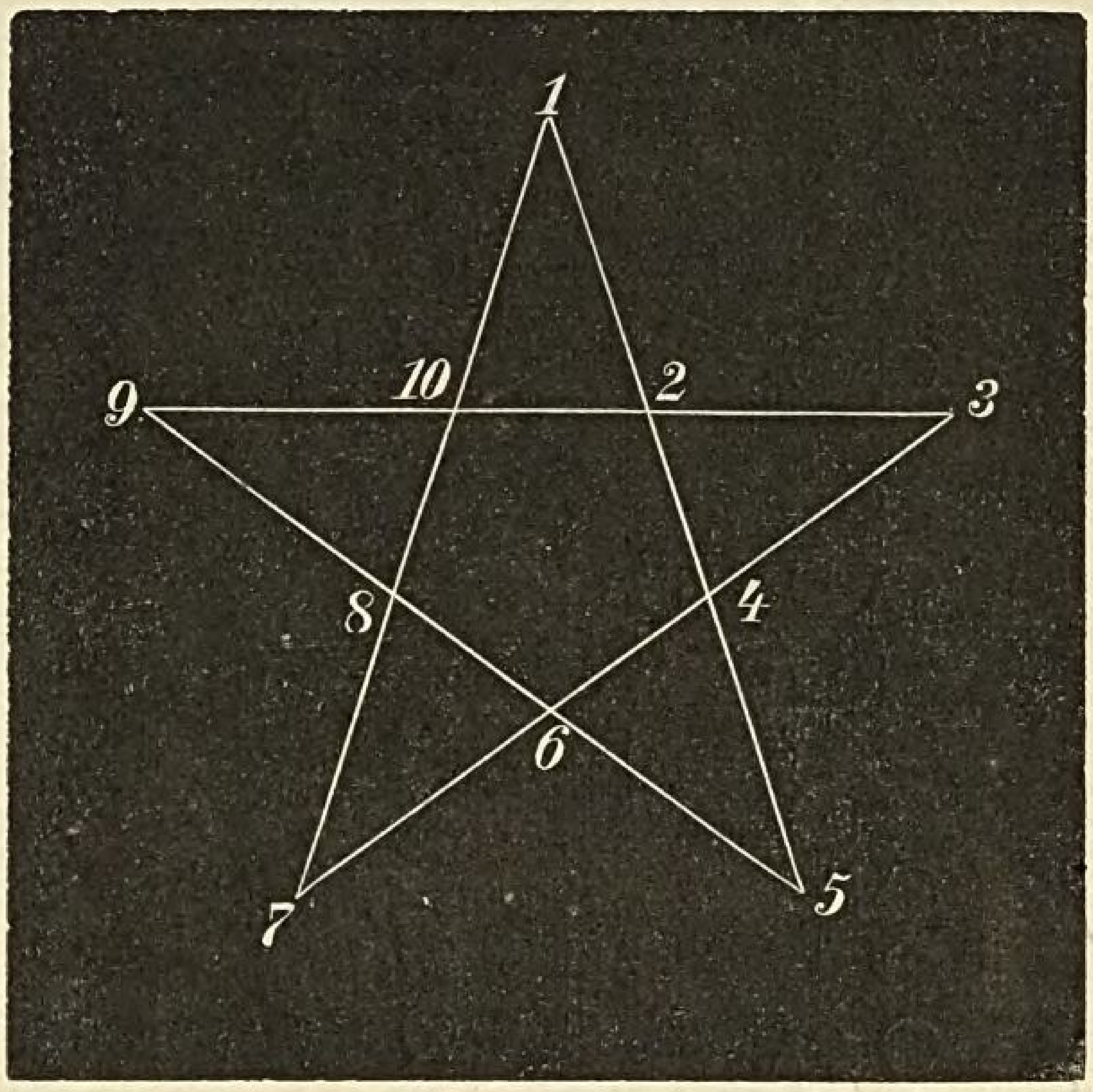
Wie ich schon erwähnte, macht 8- bis 14jährigen Kindern das offene Mühlespiel viel Vergnügen. Für dasselbe Alter empfiehlt sich auch folgendes Spiel, bei dessen Ausübung man weiter nichts, als Papier und Bleistift nöthig hat und an welchem auch mehr als zwei Mitspieler sich betheiligen können. Man zeichne ein Quadrat in Form eines Schachbrettes, bei welchem die großen Seiten des Umfangs ausgezeichnet, die Seiten der kleinen Quadrate jedoch nur punktirt sind. Jeder der Mitspielenden zieht nun der Reihe nach in beliebiger Wahl eine der kleinen Quadratseiten nach. Derjenige, welcher mit seinem Zuge ein solches Quadrat schließt, bezeichnet es durch Hineinsetzen seines Anfangsbuchstabens als sein Eigenthum und derjenige geht als Sieger hervor, welcher die meisten Quadrate geschlossen hat. Die Zahl der kleinen Quadrate ist beliebig: 16, 25, 49, 64 oder noch mehr. Bei gerader Anzahl kann das Spiel bei zwei Spielern unentschieden bleiben, bei ungerader nicht.

Sophus Tromholt hat ein ähnliches Spiel erfunden, welches sich vielfach im Handel findet und den Namen „Reversi" führt, deshalb, weil die eingeschlossenen Steine des Gegners umgedreht werden. Zu einem Brette mit 64 Feldern gehören ebensoviele Steine, die auf der einen Seite blau, auf der andern aber roth sind. Nun setzt der erste Spieler zwei blaue, der zweite darunter zwei rothe Steine, möglichst in die Mitte des Brettes. Von nun ab setzt jeder Spieler abwechselnd einen Stein und hat das Recht, den Stein des Gegners umzudrehen, sobald zwei seiner Steine den Stein des Gegners flankiren. Sind alle 64 Steine gesetzt, so ist das Spiel beendet und derjenige hat gewonnen, dessen Farbe am meisten vertreten ist.

Folgendes Kartenspiel ist mit dem auf Seite 184 beschriebenen Spiele identisch. Neun Karten liegen im Kreise. Wie muß man

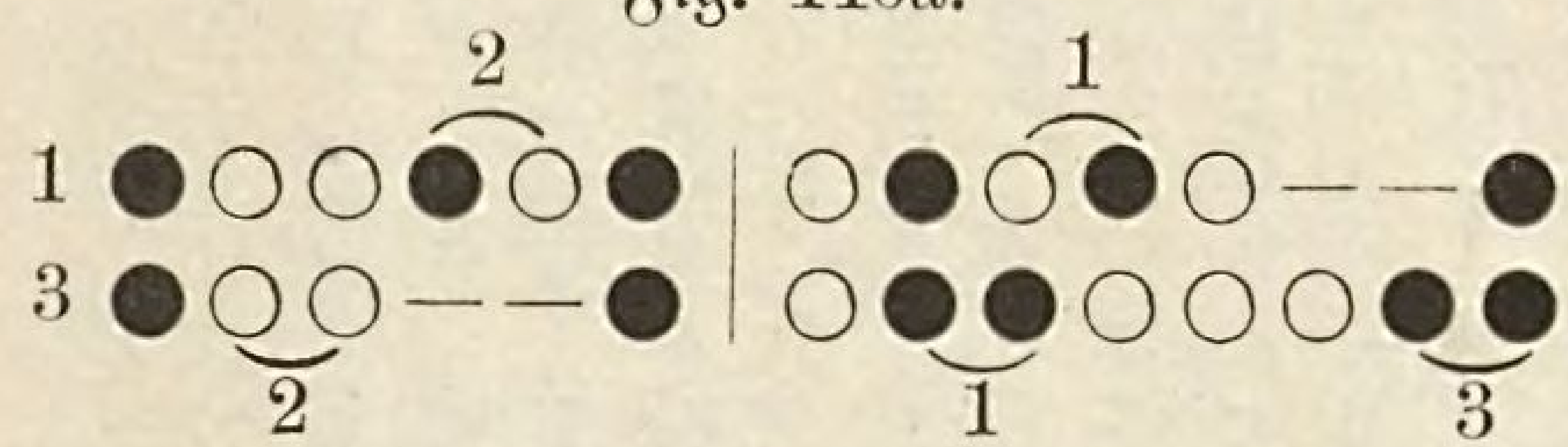
vorgehen, um acht von ihnen unter folgenden Bedingungen zu bedecken? Man nimmt eine neue Karte zur Hand, berührt, indem man „Eins, Zwei, Drei" zählt, drei aufeinanderfolgende Karten, deren letzte man bedeckt. Bei einer schon bedeckten Karte darf man nur dann beginnen, wenn man nur „Zwei, Drei" zählt unter Fortlassung der Eins, weil die bedeckte Karte für zwei zu rechnen ist. Die Richtung der Bewegung ist beliebig. Diese letzte Bedingung ist überflüssig. Man gelangt zur Lösung, wenn man, wie oben, immer da aufhört, wo man vorher begonnen hat. Aehnlich ist das in Fig. 145 dargestellte Sternspiel. Man nimmt einen Stein zur Hand und zählt, immer in gerader Linie „Eins, Zwei, Drei." Auf Drei setzt man den Stein und beginnt von Neuem, bis 9 Steine ihre Plätze haben. Hier darf man auch auf einem besetzten Felde weder Eins, noch Drei zählen, sondern nur Zwei.

Fig. 145.



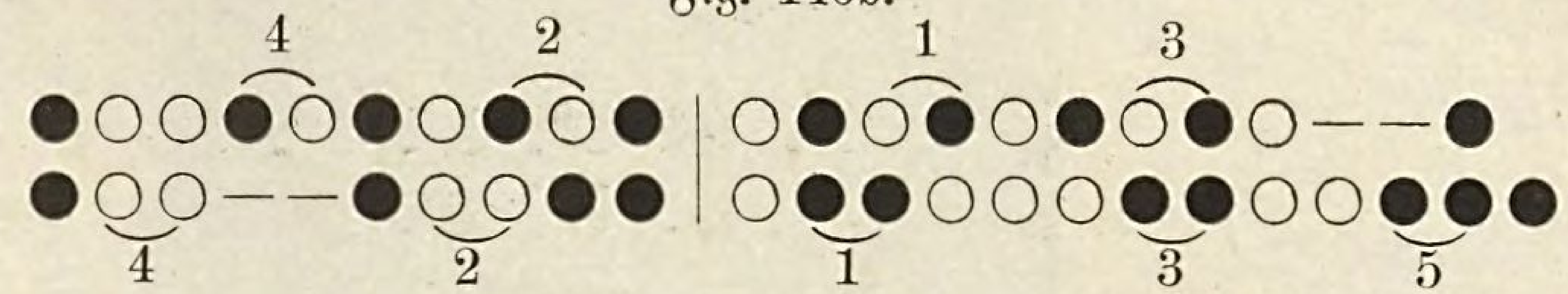
Die nächsten kleinen Uebungen zeigen, daß man, um Geduld und Scharfsinn zu üben, nicht immer einen Spielplan zu haben braucht; sie werden allein mit Steinen oder Geldstücken ausgeführt. Der berühmte englische Mathematiker und Physiker Tait hörte auf einer Eisenbahnfahrt im Abtheil folgende Aufgabe stellen: Man legt abwechselnd ein größeres und ein kleineres Geldstück in eine Reihe und soll unter Benutzung von zwei leeren Plätzen durch viermalige Umsetzung von zwei benachbarten Geldstücken, die aber in der Reihenfolge belassen werden müssen, die sie von vornherein haben, erreichen, daß die vier größeren und die vier kleineren Geldstücke geschlossen aufeinander folgen. Die Lösung findet sich unter den nachher zu erläuternden Fig. 146 bis 149. Wir setzen weiße und schwarze Steine voraus, die beiden leeren Felder sind durch Striche bezeichnet. In den ersten beiden Figuren ist die Zahl der Steine

Fig. 146a.



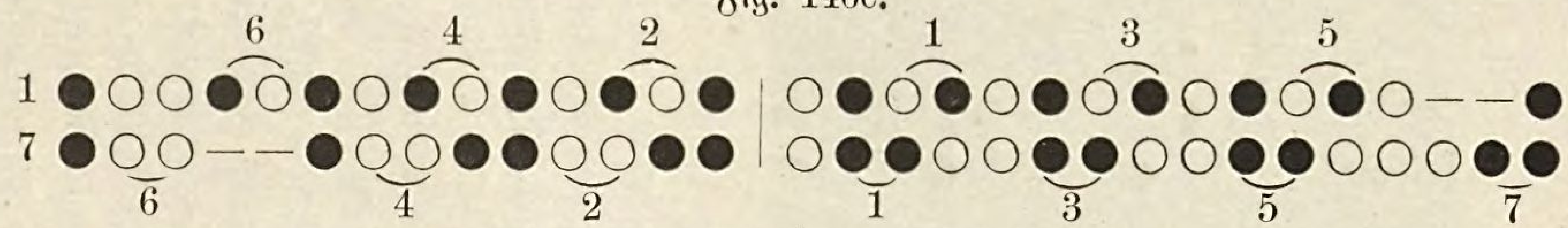
Sechs Steine von derselben Farbe.

Fig. 146b.



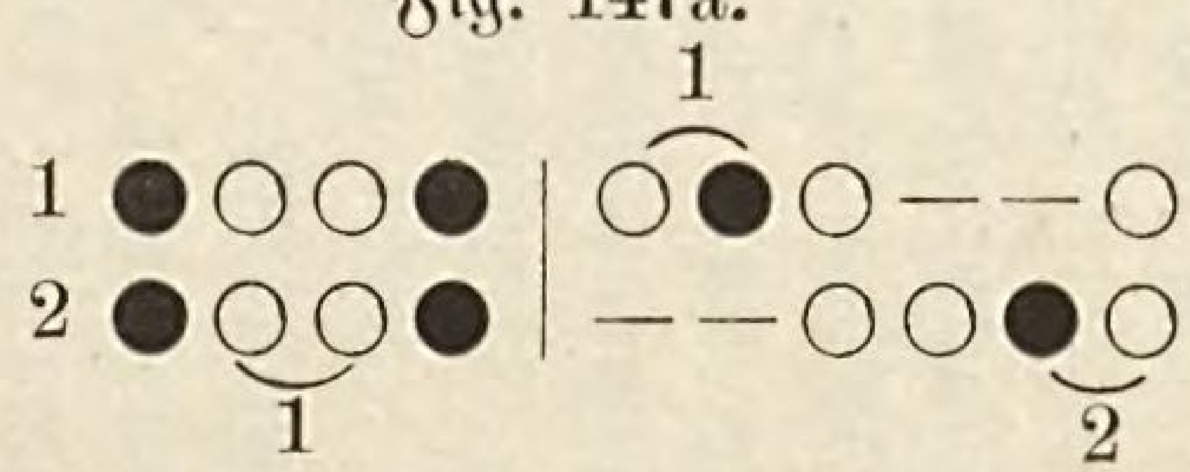
Zehn Steine von derselben Farbe.

Fig. 146c.



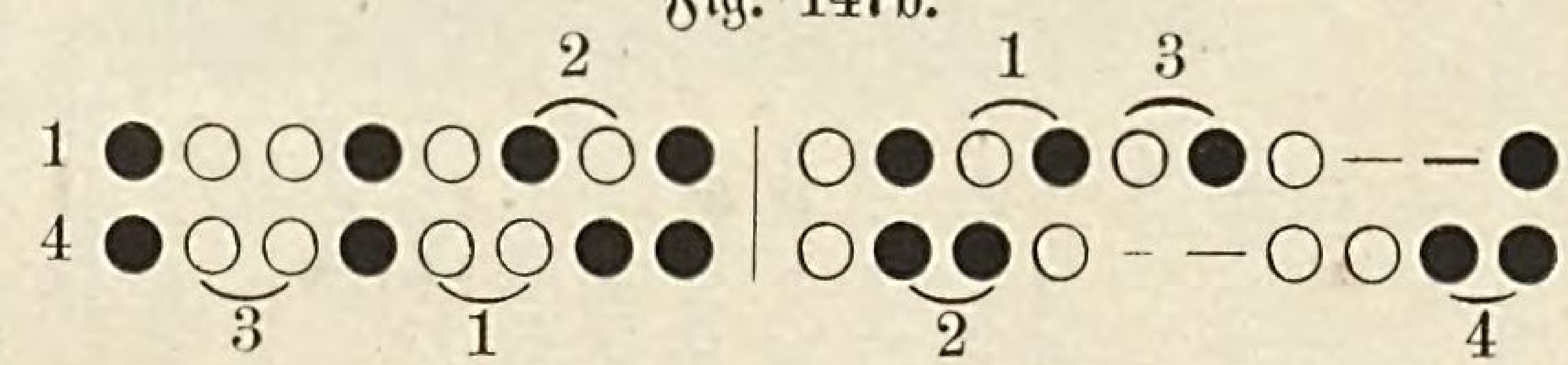
Vierzehn Steine von derselben Farbe.

Fig. 147a.



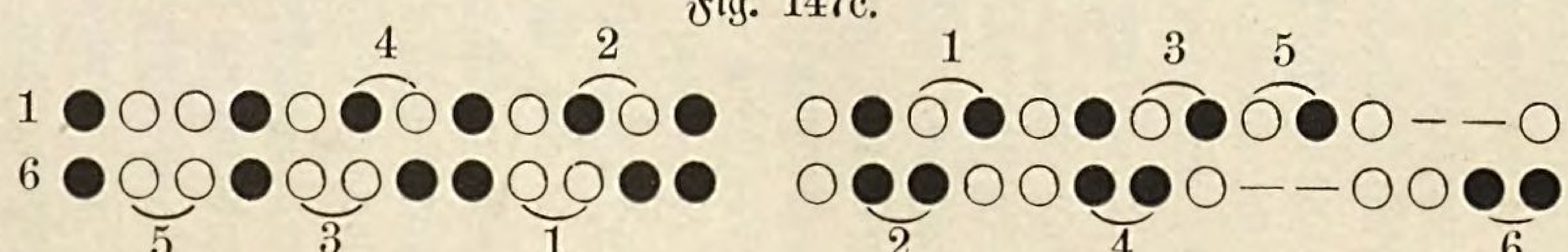
Vier Steine von derselben Farbe.

Fig. 147b.



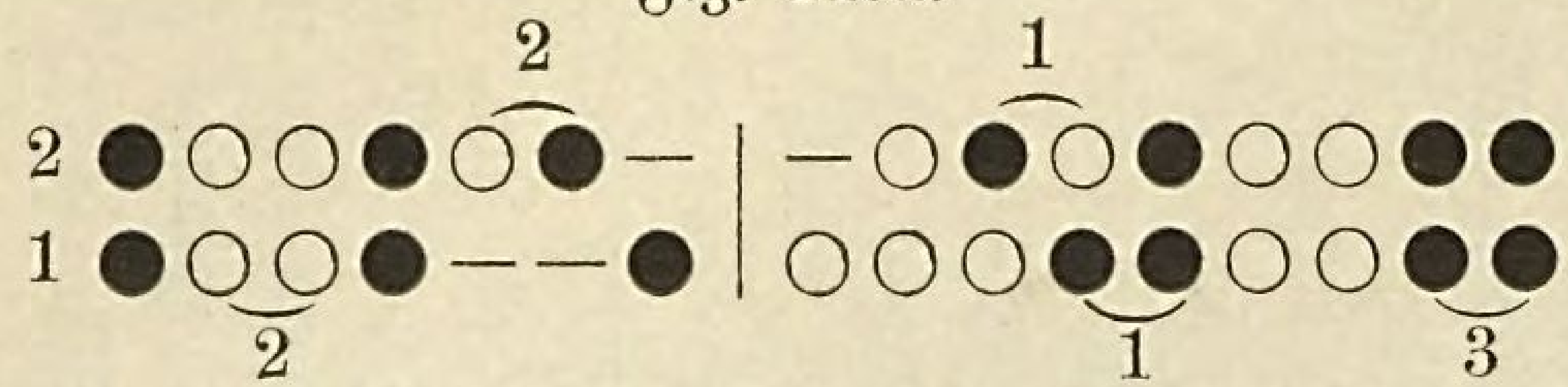
Acht Steine von derselben Farbe.

Fig. 147c.



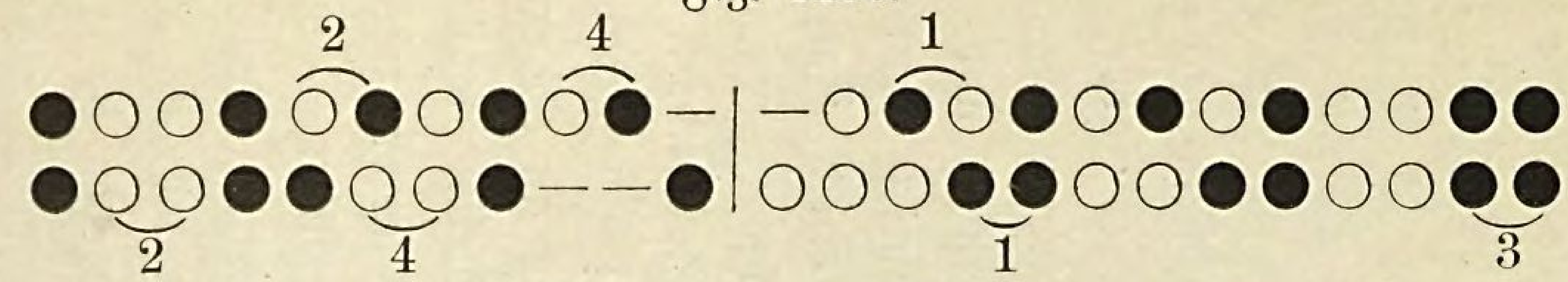
Zwölf Steine von derselben Farbe.

Fig. 148a.



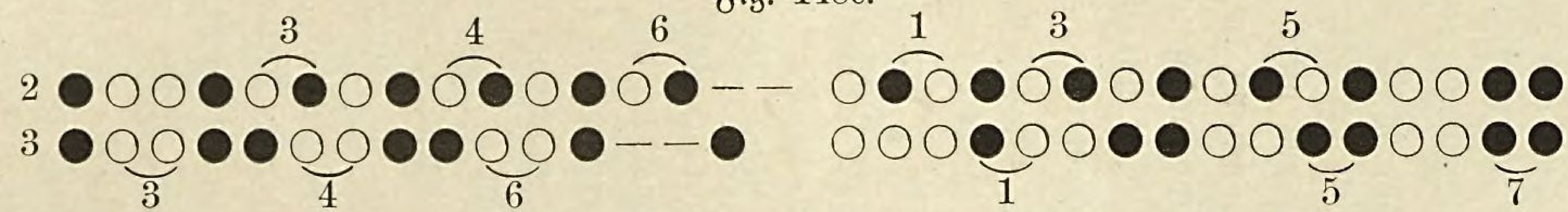
Sieben Steine von derselben Farbe.

Fig. 148b.



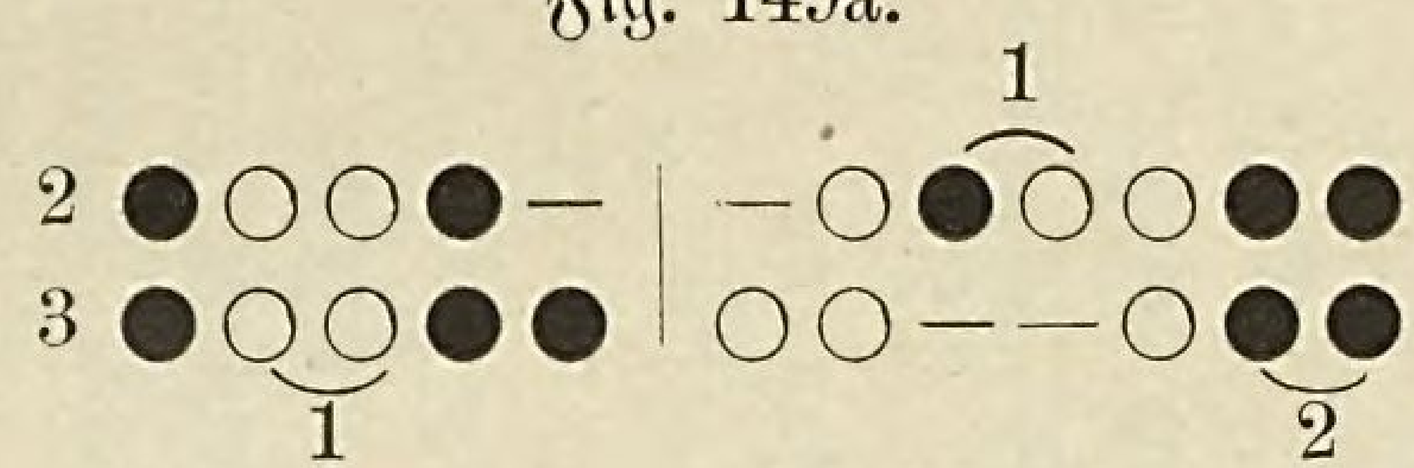
Elf Steine von derselben Farbe.

Fig. 148c.



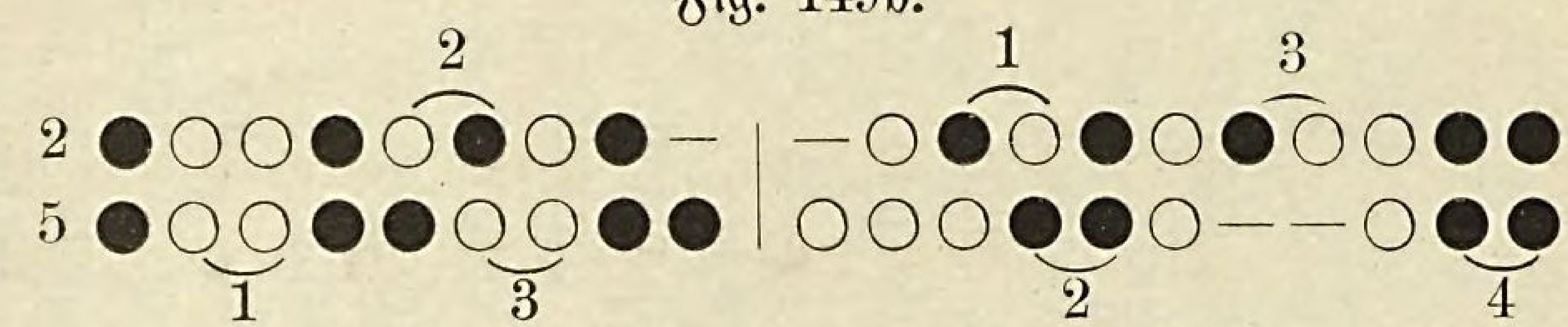
Fünfzehn Steine von derselben Farbe.

Fig. 149a.



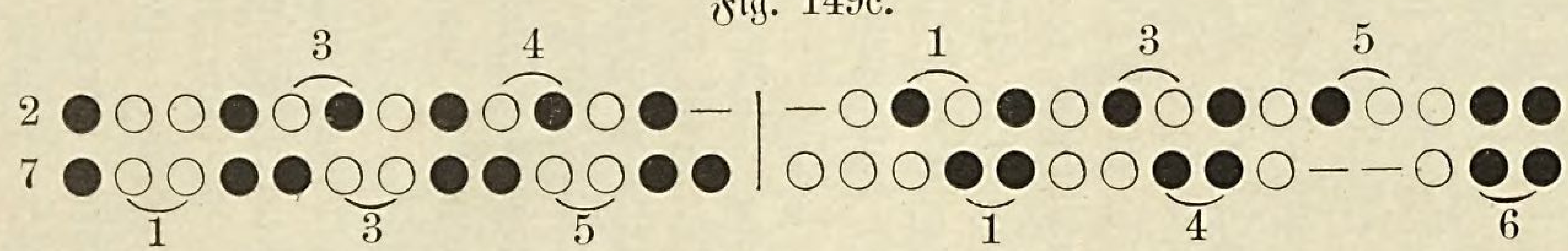
Fünf Steine von derselben Farbe.

Fig. 149b.



Neun Steine von derselben Farbe.

Fig. 149c.



Dreizehn Steine von derselben Farbe.

jeder Art gerade, in den letzten beiden ungerade. Die Theorie der Lösung in jedem Typus bleibt dieselbe, wenn man die Zahl der Steine jeder Farbe um vier vermehrt. Jede Lösung ist in zwei Reihen dargestellt: jede Reihe stellt eine Phase des Spieles vor. In der ersten Hälfte der erlaubten Züge, deren Anzahl stets mit derjenigen der Steine gleicher Farbe übereinstimmt, besteht das zur Vertauschung gelangende Paar aus Steinen verschiedener Farbe, in der zweiten Hälfte dagegen aus einem Paar von gleicher Farbe. Außerdem ist in der Mitte der Reihen ein Strich geführt und es ist ersichtlich, daß links und rechts bei den durch Klammern kenntlich gemachten Paaren, die bei der Vertauschung in der durch Zahlen bezeichneten Reihenfolge zu wählen sind, weiß und schwarz symmetrisch sind. Die Anfangsstellung ist nicht mitgezeichnet, sondern es ist bereits die erste Umstellung vorgenommen, indem bei gerader Anzahl stets der vorletzte und drittletzte Stein nach vorn an die erste und zweite Stelle gebracht wurden, wo die leeren Stellen waren. Die leeren Felder befinden sich also dann stets bereits an der zweit- und drittletzten Stelle. Nun ist erst der Mittelstrich geführt — und es folgen die nächsten Vertauschungen in der bezeichneten Reihenfolge. Man geht dann zur zweiten Reihe über, vor welcher diejenige Zahl von Umtauschungen durch eine Zahl angegeben ist, die bereits vorgenommen wurde. Nun werden die bezeichneten gleichfarbigen Paare umgestellt. Vor der ersten Reihe derjenigen Figuren, welche die Steine gleicher Farbe in ungerader Anzahl aufweisen, finden wir die Zahl Zwei. Es sind also vorher bereits zwei Züge gemacht. Der erste ist genau derselbe, wie vorhin; auch die Mittellinie wird nun gezogen und die zu beiden Seiten derselben stehenden Steine werden beim zweiten Zuge fortgenommen und an die beiden leeren Plätze am Ende der Reihe gebracht, die ja durch den ersten Zug an der zweit- und drittletzten Stelle entstanden waren. So stellt sich die erste Reihe in jeder der beiden letzten Figuren dar und man hat dann die bezeichneten Vertauschungen vorzunehmen, um am Schlusse der letzten das Ziel der geforderten Aufeinanderfolge zu haben. Stets dürfen soviele Paare vertauscht werden, als im ganzen vorhanden sind. Man kann natürlich in umgekehrter Reihenfolge verfahren, d. h. anfangs die Schlußstellung von vorhin wählen und durch Ausführung der Züge

in umgekehrter Reihenfolge die vorige Anfangsstellung erreichen. Die allgemeine Theorie dieses Spieles hat der französische Militär-intendant M. Delaunay gegeben. Ich will in den folgenden Zeilen einen von mir entworfenen Spielplan (Fig. 150 auf angehängter Tafel) beschreiben, auf dem sich mehrere Geduldspiele und ein der Mühle ähnliches Gesellschaftsspiel mit Figuren oder Steinen verschiedener Farbe spielen läßt. Die Steine zerfallen in drei Gruppen; ich würde daher mit Rücksicht auf die Form des Planes, die in einigen Hauptlinien die Gestalt eines Verdienstkreuzes hat, die deutschen Farben schwarz, weiß, roth empfehlen. Dementsprechend würden acht Steine und die zugehörigen acht äußeren Felder schwarz sein, die mittleren Steine und Felder auf den Ecken des größeren Quadrates weiß, die inneren auf den Schnittpunkten der Umrisse des Kreuzes roth. Für das erste Geduldspiel bedarf man nur der acht äußeren Felder und der dafür bestimmten Steine. Es ist das bereits oben (S. 184) beschriebene „Sternspiel" bei dem es sich darum handelt, die Steine in bestimmter Weise an ihre Plätze zu bringen. Wir haben eine einfache Regel dafür gegeben, die aber nicht immer sofort beim ersten Versuch gefunden werden dürfte. Das zweite Geduldspiel ist ein Permutationsspiel in der Art des Boss-Puzzle. Die sechszehn Steine werden ganz beliebig auf Felder gesetzt und sollen dann durch Verschieben mit Hülfe eines durch Fortnehmen eines Steines erhaltenen leeren Feldes geordnet werden. Der Vorzug vor dem Boss-Puzzle besteht hierbei darin, daß nicht, wie bei jenem, die Hälfte der möglichen Anfangsstellungen, also mehr als 10 Billionen, unlösbar sind. Vielmehr sind sämmtliche Aufgaben lösbar. Wir geben ein Beispiel, das in einer möglichst geringen Anzahl von Zügen zur Lösung führt. (Die punktirten Linien sind nicht zu benutzen, während bei dem vorhin erwähnten Spiel die krummen Linien des Kreuzes unbenutzt bleiben).

I. Die Anfangsstellung sei:

schwarz:	7 8 12 15 3 4 5
weiß:	10 13 16 6
roth	2 9 11 14.

Feld Eins ist also leer. Man ziehe 13 2 9 12; das heißt der auf 13 befindliche Stein wird nach 1 gebracht, dann der Stein 2 auf 13, 9 auf 2, 12 auf 9. Ebenso 8 16 7 11; 12 8 16 7;

11 6 15 16; 13 2 9 12; dann 1 auf 12. Jetzt ist die Aufgabe gelöst.

Für die Gesellschaftsspiele, welche auf demselben Plane gespielt werden können, wollen wir uns die Felder durch Buchstaben des Alphabetes, wie in der Figur angegeben ist, bezeichnet denken. Man kann erstens zu Zweien spielen. Dann erhält jeder Spieler vier Steine, der eine die weißen, der andere die rothen. Jeder setzt nun abwechselnd seine Steine der Reihe nach, wobei man sich bemüht, die Pläne des Gegners zu zerstören, sich selber aber möglichst viel Chancen zu sichern. Sind alle Steine gesetzt, so wird abwechselnd — wiederum nicht auf den ganz punktirten Linien — gezogen. Derjenige Spieler hat gewonnen, welcher zuerst seine Steine in eine der folgenden Stellungen gebracht hat, worauf man von Anfang an natürlich die Aufmerksamkeit zu richten hat.

1. In gerader Linie (viermal): AILF, BJKE, CJIH, DKLG.

2. In krummer Linie (viermal): ANOD, BNMG, COPF, EPMH.

3. Im Quadrat (achtmal): ACEG, BDFH, ABIJ, CDKJ, EFLK, GHIL, IJKL, MNOP.

4. Im Trapez (viermal): ANMH, BNOC, DOPE, FPMG.

5. Vier benachbarte Felder des großen Kreises (achtmal).

6. Rechteck (viermal): ABEF, BCFG, DEHA, CDGH.

7. Dreieck (viermal): AJDL, BJGK, CKFI, ELHJ.

Im Ganzen ist also sechsunddreißigmal die Möglichkeit vorhanden, zu gewinnen. Hier möge ein Beispiel folgen:

Weiß B, E, A, O, EK, BN, KD.

Roth C. J, F, I, FP, PM. Weiß hat gewonnen auf ANOD.

Wenn drei Spieler spielen, so nimmt Jeder drei Steine von jeder Sorte und es gewinnen folgende Figuren:

1. Die Dreiecke: AIH, BJC, EKD, FLG, ebenso ANB, OCD, FEP, GMH.

2. Die Spitzen (acht): z. B. AIN, HIM.

3. ANO, NOD, HMP, MPE (achtmal) und AIL, ILF u. s. f. (achtmal).

4. Die großen Dreiecke: GBK, ALD u. s. f. (viermal).

5. Die Linien: AJD, FKC u. s. f. (viermal).

6. Drei aufeinanderfolgende Felder auf dem Kreise (achtmal).

Hier kann der Sieg auf 48 verschiedene Arten errungen werden;

doch sind sehr leicht Fehler möglich; es haben daher, wenn einer der Spieler gespielt hat, die beiden Andern stets das Recht, zu beratschlagen, wie sie ihm entgegen arbeiten wollen und der dabei für richtig gehaltene Zug ist bindend und muß von einem Jeden ausgeführt werden. Dieser Umstand macht das Spiel im höchsten Grade interessant, zumal da selbst die stattgehabte Beratschlagung nicht vor Fehlern schützt.

Ein Beispiel:

Schwarz G, H, I, IJ, GM — wollte die Spitze MIH bilden.

Weiß M, A, P, MN. PO gewinnt auf ANO.

Rot L, F, E, LK — wollte den Bogen GFE bilden.

Wenn vier Spieler Teil nehmen wollen, so nimmt jeder zwei Steine und der erste ist Partner des dritten, wie der zweite der des vierten. Die zusammengehörigen Spieler dürfen berathen. Die für den Gewinn verlangten Figuren sind dieselben wie bei zwei Spielern.

13.

Reisespiele.

Der berühmte englische Mathematiker Hamilton, der Erfinder der Quaternionen, einer besonderen Art komplexer Größen,[1]) die auf den Raum gedeutet werden, hat im Jahre 1859 zwei Spiele erfunden, die er „Weltreisespiele" nannte und die in England als Geduldspiele eine große Verbreitung gefunden haben. Wir glauben, daß die elegante mathematische Theorie auch deutsche Leser fesseln und veranlassen wird, sich näher mit diesen Spielen zu beschäftigen. Wir müssen aber zuvor einige Worte über reguläre Polygone vorausschicken.

Wenn wir gewisse sternförmige Körper, die also Ecken mit einspringenden Winkeln besitzen, ausschließen, so giebt es fünf regelmäßige Körper. Diese waren schon im Altertum bekannt und haben die Bezeichnung „platonische Körper" erhalten; analog den regulären Vielecken in der Ebene haben sie die Eigenschaft, sich in eine Kugel so hineinlegen zu lassen, daß ihre Ecken auf der Oberfläche derselben liegen und auch eine Kugel so hineinbeschreiben zu lassen, daß die Flächen der Körper nur einen Punkt (Berührungspunkt) mit der Kugel gemeinsam haben. Diese Körper heißen Tetraeder (4 Flächen), Oktaeder (8 Flächen), Hexaeder (6 Flächen), Ikosaeder (20 Flächen) und Dodekaeder (12 Flächen). Da sie regelmäßig sind, so müssen sämmtliche Flächen regelmäßige Vielecke von der Seitenzahl p sein und in allen Ecken müssen gleich viele Kanten q zusammenstoßen. Bezeichnen wir nun die Zahl der Kanten mit K, die der Flächen mit F und die der Ecken mit E, so ist die doppelte Kantenzahl also $2K = pF = qE$, da eine Kante stets zwei Flächen gemeinsam ist und jede Kante in zwei Ecken ausläuft. Nun hat aber zuerst

---

[1]) Seite 27 und 28.

Descartes[1]) einen für konvexe Körper geltenden Satz aufgestellt. Dieser besagt, daß die Zahl der Kanten um zwei vermehrt dieselbe Zahl ergiebt, wie die Summe der Flächen und Ecken, also $K + 2 = F + E$. Rechnen wir nun F aus, indem wir, der obigen Doppelgleichung gemäß $K = \frac{pF}{2}$ und $E = \frac{p}{q} F$ setzen, so wird $F = \frac{4q}{2(p + q) - pq}$. Nun kann man für p und q zwar beliebige Zahlen setzen, ist aber der Beschränkung unterworfen, daß F eine ganze Zahl und positiv ist. Danach können p und q nur = 3, 4 oder 5 sein und zwar gemäß folgender Tabelle (Fig. 151), bei der außer F auch E, K und die Zahl D der Diagonalen mitgeschrieben sind.

Fig. 151.

p	q	F	E	K	D	
3	3	4	4	6	0	Tetraeder
3	4	8	6	12	3	Oktaeder
4	3	6	8	12	4	Würfel
3	5	20	12	30	36	Ikosaeder
5	3	12	20	30	100	Dodekaeder

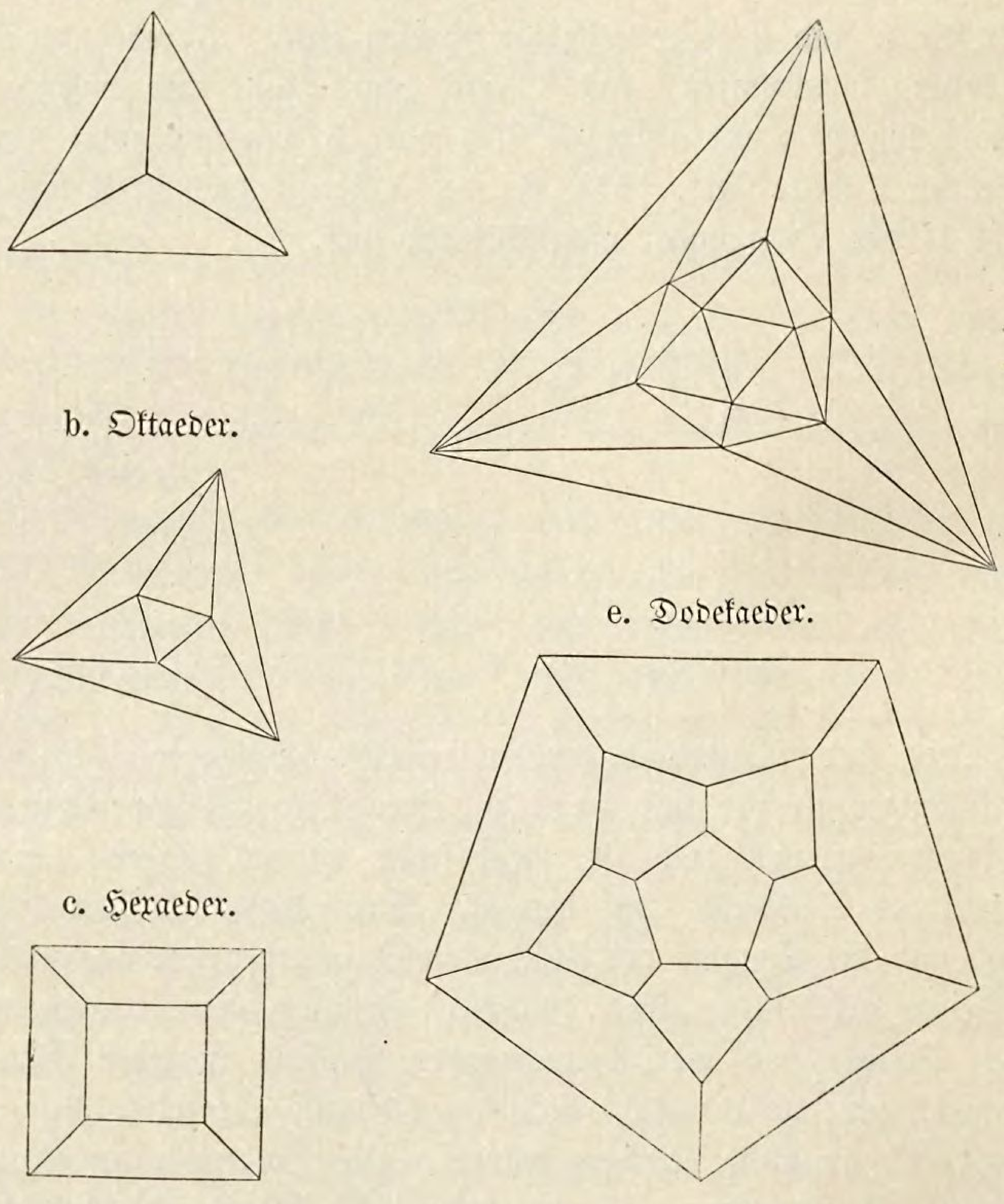
Dies sind sämmtliche konvexe reguläre Polyeder. Daß ein regelmäßiger Körper mit drei in einer Ecke zusammenstoßenden Sechsecken unmöglich ist, geht schon daraus hervor, daß der Winkel des Sechsecks 120° beträgt. Denn $3 \times 120°$ sind bereits 360° und die Summe der Flächenwinkel in jeder konvexen Ecke ist kleiner als 360°. Aus ähnlichen Gründen können auch nicht sechs Dreiecke und vier Vierecke oder Fünfecke in einer Ecke zusammenstoßen, da $6 \times 60° = 360°$, $4 \times 90°$ ebenfalls 360° und $4 \times 108°$ gar 432° betragen würde. Die Konvexität der Körperecken ist also der Grund für die beschränkte Anzahl und thatsächlich haben Poinsot und andere eine Reihe von regulären Körpern mit einspringenden Ecken abgeleitet. Den einfachsten derselben erhält

[1]) Diesen Satz hat man früher dem Mathematiker Euler zugeschrieben, doch findet er sich bereits in Carthesius' Schriften. Oeuvres inédites 1860.

man, wenn man auf jede Fläche eines Dodekaeders gleich hohe fünfseitige Pyramiden aufsetzt, deren Kanten die Verlängerungen der Kanten des Dodekaeders sind. Versetzt man sich mit dem Auge in die Nähe der Mitte einer Fläche, so sieht man die regulären Körper perspektivisch so, wie sie in der Fig. 152 gezeichnet sind, wobei man

Fig. 152.

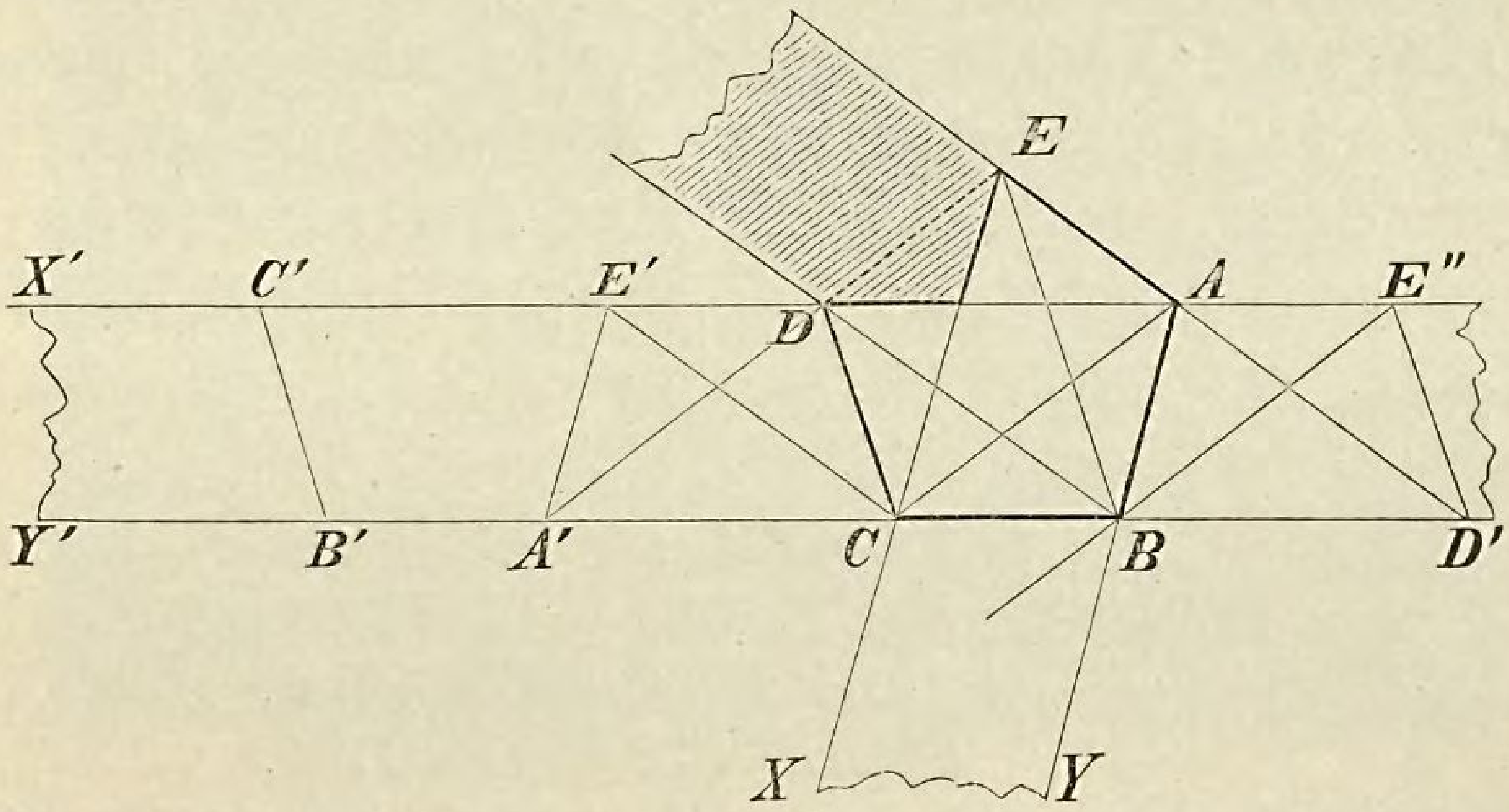
a. Tetraeder. d. Ikosaeder. b. Oktaeder. e. Dodekaeder. c. Hexaeder.



sich das Auge auf der größten Fläche zu denken hat. Bei unseren Spielen handelt es sich um das Dodekaeder und das Ikosaeder, die in der eigentümlichen Beziehung stehen, daß sie gleichviele Kanten (30) haben, dagegen jedes soviel Ecken, wie das andere Flächen. Dies rührt natürlich daher, weil bei ersterem drei Fünf-

ecke, bei letzterem fünf Dreiecke in einer Ecke zusammentreffen. Das regelmäßige Fünfeck ist eines der interessantesten regelmäßigen Vielecke, die es giebt. Wir haben früher erörtert, wie das regelmäßige Zehneck entsteht und durch Ueberschlagen einer Ecke kann man natürlich das Fünfeck auch erhalten. Die Fig. 153 zeigt, wie man durch Faltung und Ineinanderschiebung eines Papier- oder Zeugstreifens ein reguläres Fünfeck bekommt. Der schraffirte Teil ist die beim letzten Durchstecken zum Vorschein kommende Rückseite der linken Seite des Streifens. Die Punkte sind so bezeichnet, daß die, welche beim Umklappen zur Deckung kommen, denselben Buchstaben tragen. Die Winkel des Fünfecks sind je 108°, die Winkel an jeder Diagonale 36°, die beiden von einer Ecke ausgehenden

Fig. 153.



Diagonalen trisezīren demnach den Winkel des Fünfecks. Zeichnet man über jeder Seite eines regelmäßigen Fünfecks wieder ein solches und knickt die gemeinsamen Kanten ein, so läßt sich aus dem so entstehenden Netz ein Körbchen bilden und zwei solcher Körbchen aneinandergefügt, wie die Hälften eines Balles, bilden das Dodekaeder. Verbindet man dann wieder die Mittelpunkte der Fünfecke dieses Körpers untereinander, so erhält man einen Körper mit zwölf Ecken, zwanzig Flächen, da unter jeder Dodekaederecke eine Fläche des neuen Körpers liegt, und dreißig Kanten, da jede Dodekaederkante von einer Kante des neuen Körpers senkrecht gekreuzt wird. Dieser neue Körper ist das Ikosaeder.

Nun aber wollen wir nach dieser Abschweifung zur

Beschreibung des Spieles übergehen. Man denke sich in den Ecken des Dodekaeders die zwanzig Buchstaben mit folgender Bedeutung.

B Berlin	H Hamburg	N Neapel	T Tobolsk
C Cassel	J Jeddo	P Paris	V Victoria
D Delhi	K Kaschmir	Q Quebec	W Washington
F Frankfurt	L London	R Rom	X Xeres
G Genf	M Moskau	S Stockholm	Z Zanzibar.

Die dreißig Kanten des Dodekaeders mögen durch Farben besonders hervorgehoben sein, da sie die Zugstraßen vorstellen, auf denen man von einer Stadt zur anderen gelangt. Sind nun in den Ecken kleine Nägel mit Köpfen, so kann man mit Hilfe eines Fadens, denn man der Reihe nach um diese Nägel schlingt, das Spiel ausführen. Es handelt sich nämlich darum, auf einem Wege, dessen erste fünf Stationen vorgeschrieben sind, sämmtliche Stationen, aber jede nur einmal zu besuchen und dann an den Ausgangspunkt zurückzukehren. Durch die Buchstaben unserer obigen Figur ist ein solcher Weg bezeichnet, dessen erste Orte BCDFG vorgeschrieben sind. Eine zweite Lösung derselben Aufgabe ist: BCDFGHXWRSTVJK LMNPQZ. Es giebt stets mindestens zwei Lösungen, aber auch vier können vorkommen, z. B.

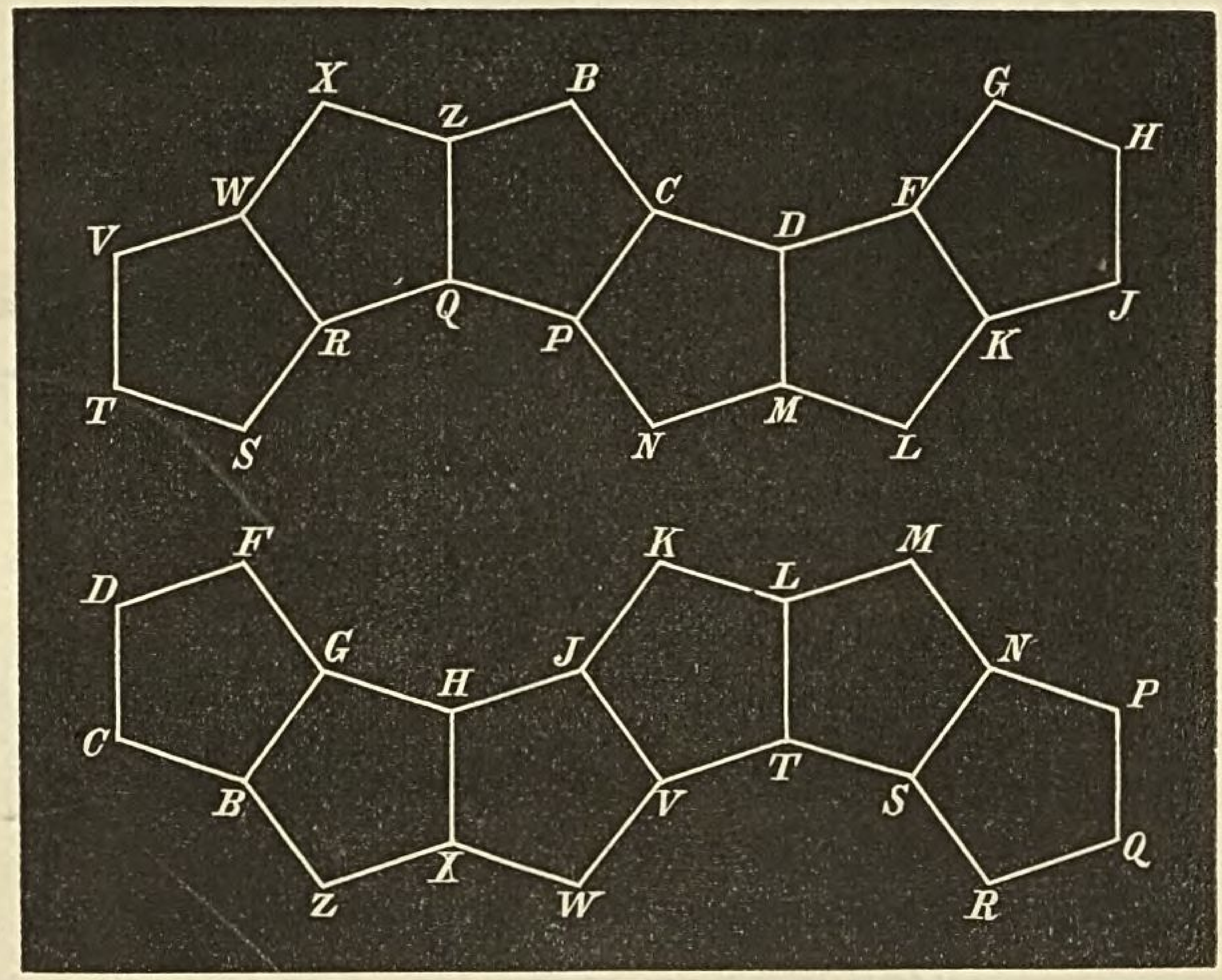
LTSRQ { ZXWVJHGBCPNMDFK
ZBCPNMDFGHXWVJK
ZBGHXWVJKFDCPNM.
PNMDCBZXWVJHGFK.

Der sechste Ort war bei der ersten Aufgabe beide Male H, bei dieser dreimal Z und einmal P. Daraus folgt, daß, wenn sechs Anfangsstationen vorgeschrieben sind, drei, zwei oder eine Lösung möglich sind. Wir werden nachher aber sehen, daß unter Umständen diese Aufgabe auch unmöglich sein kann, was bei fünf Anfangsstationen nicht vorkommt.

Die Theorie, welche wir entwickeln wollen, stammt von Hermary. Diese geht davon aus, daß doch eine vollkommene Rundreise den Körper natürlich in zwei vollkommen getrennte Teile zerlegen muß, die gleich viele Flächen, Ecken und Kanten enthalten werden. Ferner können die den sechs Fünfecken jeder Hälfte gemeinsamen fünf Kanten nicht zu dem Reiseweg gehören, da man ja die Endpunkte dieser Kanten nur einmal durchwandern kann.

Die nächste Figur stellt die beiden Hälften in eine Ebene (Fig. 154) ausgebreitet dar und zwar entsprechen sie der zuerst gegebenen Lösung in der alphabetischen Reihenfolge. Durch Einknicken der gemeinsamen Kanten benachbarter Fünfecke kann man das Dodekaeder bilden, wenn man beide Hälfte aneinander kleben würde. Unterscheiden wir nun in beiden Hälften diejenigen Ecken, die nur

Fig. 154.



in einem Fünfeck vorkommen, von denen, die zweien gemeinsam sind, so müssen, da in jeder Ecke des Dodekaeders drei Kanten zusammenstoßen, die einfachen Ecken des einen Schnittes doppelte Ecken des anderen sein. In der That sind die einfachen Ecken CDF des zweiten Schnittes im ersten Doppelecken, dagegen die Doppelecken B, G des zweiten einfache des ersten. Die mittleren Fünfecke haben immer nur eine einfache Ecke, daher müssen die beiden äußeren je drei haben, da wegen der Wechselseitigkeit von jeder Art zehn vorhanden sein müssen. Es geht aus diesen Betrachtungen hervor, daß die beiden Hälften völlig identisch in der Ebene sind. Die eine ist die Rückseite der anderen. So muß es aber immer sein, wenn ein voller Umgang auf den Kanten und durch die Ecken des Dodekaeders gemacht werden soll: Stets

liefert die Reise zwei solche gleiche Hälften des Dodekaeders, wenn dieses längs den beschrittenen Kanten durchschnitten und die Hälften in eine Ebene ausgebreitet werden. Man braucht also bei jeder gestellten Aufgabe mit dem Körper in der Hand nur zu erwägen, auf welche Weise und wie oft eine solche symmetrische Teilung des Dodekaeders möglich ist. Die oben ausgeführten Beispiele möge man benutzen, um diese Methode einzuüben.

Hermary hat aber noch eine einfachere Methode angegeben. Wenn man zwei Seiten eines Dodekaeders durchlaufen hat, so kann die dritte entweder auf demselben oder auf dem benachbarten Fünfeck liegen. Bezeichnen wir diese beiden Arten dem Anfangsbuchstaben entsprechend mit d und b, so haben wir

B C D F G H J K L M N P Q R S T V W X Z B C D
. . d d b d d b b b b b | d d b d d b b b b b .

Die darunter geschriebenen Zeichen bilden aber eine aus gleichen Teilen bestehende Reihe von je zehn Buchstaben

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
d d b d d b b b b b.

Sind nun fünf Städte vorgeschrieben am Beginn der Reise, so haben die vierte und fünfte entweder die Buchstaben bb oder bd oder db oder dd und man braucht in obiger Reihe nur die betreffende Kombination aufzusuchen, um sofort die Lösung hinzu zu schreiben. Erhält man bb, so kann man mit 6, 7, 8 oder 9 beginnen und die Reihe der 20 Buchstaben so weiterschreiben, wie sie erscheinen, wenn sie auf den Umfang eines Kreises gesetzt werden. Die zugehörigen Orte sucht man an dem Dodekaeder oder seinem ebenen perspektivischen Bilde (s. Fig. 152) auf. Für bd erhält man eine Lösung, die mit 3 oder 10 beginnt, für db beginnt sie mit 2 oder 5 und für dd mit 1 oder 4. Im Ganzen sind demnach vier verschiedene Arten von Lösungen möglich.

Nach dieser Methode kann man nun die Zahl aller möglichen Lösungen des Hamilton'schen Problems bestimmen. Ist über die ersten Stationen nichts weiter vorgeschrieben als daß man mit B etwa beginnen soll, so giebt es 30 Lösungen. Sind die ersten beiden Orte vorgeschrieben, so giebt es 20 Lösungen, für die ersten drei — 10, vier — 6 oder 4, fünf, wie wir schon sahen, 4 oder 2, sechs — 3, 2, 1, 0, sieben — 2, 1, 0, acht und mehr — 1 oder 0.

Jetzt ist auch klar, warum Hamilton verlangt, daß gerade **fünf** Anfangsstationen gegeben sind. Die Zahl der Lösungen ist dann nicht so groß, daß die Aufgabe zu leicht sein würde, aber doch noch immer möglich, da es **mindestens** zwei Lösungen giebt. Je mehr Anfangspunkte vorgeschrieben sind, um so eher tritt der Fall ein, daß eine Lösung nicht möglich ist.

Da das Dodekaeder dreißig Kanten besitzt, so bleiben bei jeder Reise zehn unbenutzt, von denen aber keine zwei in einer Ecke zusammenstoßen können. Denn drei Kanten stoßen überhaupt nur in jeder Ecke zusammen: zwei von ihnen werden benutzt, die dritte nicht. Die Lösung der Aufgabe kann auch so gefunden werden, daß an jeder Ecke eine Kante gestrichen wird. Es wird demnach da dreißig Lösungen möglich sind, auch dreißig Gruppen solcher isolirter Kanten geben. Wählt man eine bestimmte Kante aus, die in zwei Ecken endigt, so gehören zu ihr zwanzig solcher Gruppen und so fort, genau entsprechend der obigen Lösung. Eine andere Formulirung des Problems erhält man mit Hülfe eines Dominospieles, welches mit der Doppeleins beginnt und mit der Doppelzwanzig aufhört. Es entsprechen den zwanzig Buchstaben des Spieles in den Ecken die Zahlen und jeder Kante ein Stein, z. B.

BC = | 1 | 2 |, CZ = | 2 | 20 |.

Man bildet nun mit zwanzig dieser Steine einen geschlossenen Kreis nach den Regeln des Dominospieles (siehe den Abschnitt über Domino) derart, daß jede Zahl nur zweimal und nicht öfter vorkommt. Man kann also das Hamilton'sche Reisespiel auch mit einem so erweiterten Dominospiel ausführen.

Es giebt nun viele Abarten des Rundreisespieles. So führt Lucas folgende Bedingungen durch. Drei Orte sind für den Anfang der Reise gegeben, man soll alle 20 einmal berühren, aber bei einem vorher bestimmten Orte soll die Reise beendigt sein. BCD seien die ersten drei Orte. Dann giebt es keine Lösung, wenn die letzte Station M, F, G, H, P, Q, S oder X sein soll. Ist einer der übrigen neun Orte als Endstation vorgeschrieben, so giebt es eine oder zwei, für R sogar vier Lösungen. Wir lassen sie hier folgen:

1. T BCD FGHXZQPNMLKJVWRST

2. W BCD { FGHXZQPNMLKJVTSRW
MLTV6KFGHXZQPNSRW }

3. J BCD { MKTVWRSNPQZXHGFKJ
MNPQZXHGFKLTSRWVJ }

4. K BCD { FGHJVTSRWXZQPNMLK
FGHXZQPNMLUSRWVJK }

5. L BCD { MNPQZXHGFKJVWRSTL
MNPQZXWRSTVJHGFKL }

6. N BCD { MLKFGHJVT8RWXZPQN
MLTSRWVJKFGHXZQPN }

7. V BCD { FGHJKLMNPQZXWRSTV
MNPQZXWRSTLKFGHJV }

8. R BCD { EGHJKLMNPQZXWVTSR
MKKFGHJVTSNPQZXWR
MLTSNPQZXHGFKJVWR
MNPQZXWVJHGFKLTSR }

Für Z hat man natürlich die beiden normalen Lösungen der natürlichen Reihenfolge der Buchstaben.

Eine andere Abart des Spieles ist folgende. Man wähle mehrere Orte aus, die der Reihe nach im Anfang der Reise berührt werden sollen. Man bestimmt nun eine Anzahl von Orten, nach deren Durchlaufung eine Weiterwanderung unmöglich sein soll. Man beginne z. B. mit XWVT und schreibe vor, daß nach Erreichung des zehnten Ortes das Spiel beendet ist, weil man nur wieder an einen bereits berührten Ort gelangen kann. Die einzige Lösung ist XWVTLKFGHJ. Thatsächlich kann man von J aus nur wieder nach K oder V gelangen. Ebenso giebt es für BCDM nur die Lösung BCDMLKJHGF. Aehnlich sind folgende Abänderungen. Man soll mit BBD beginnen, L nicht berühren (etwa, weil dort die Cholera herrscht) und bei zwei Orten endigen, die nicht bei L liegen. Es giebt folgende beiden Lösungen:

BCD { MNPQZXWRSTVJKFGH
MNPQJXHGFKJVTSRW. }

Oder man soll, wieder mit BCD beginnend, P vermeiden und bei F endigen. Es giebt zwei Lösungen:

BCD { MNSTLKJVWRQZXHGE
MNSRQZXWETLKJHGF. }

Will man den Geist von Kindern an derartigen Spielen schärfen, so wähle man statt des Dodekaeders das Tetraeder oder den Würfel. Auch hier stoßen in jeder Ecke drei Kanten zusammen, beim Tetraeder müssen zwei von den sechs Kanten, beim Würfel vier von den zwölf Kanten nicht begangen werden und es wird leicht sein, sie auszuscheiden. Auch hier kann das Spiel entweder an den Körpern oder ihren ebenen Projektionen (Fig. 152) ausgeführt werden.

Wir haben schon ausgeführt, wie man das Ikosaeder aus dem Dodekaeder entstanden denken kann und in welchem wechselseitigen Verhältniß die Zahl ihrer Ecken, Kanten und Flächen steht. Das Beispiel erhält beim Ikosaeder folgende Form. Die 20 Flächen desselben sind jetzt die Orte oder Bezirke, die 30 Kanten die Grenzen, welche man überschreiten muß, um von einem Bezirk zum anderen zu gelangen. Alle Bezirke sollen besucht werden, aber nur einmal. Dazu muß man zwanzig Grenzen überschreiten und es sind demnach wieder zehn Kanten auszuscheiden, an jeder Ecke (jede Kante endet in zwei Ecken) eine. Die Lösung geschieht wieder am besten nach dem Verfahren von Hermary.

Hamilton selber hat bereits im Jahre 1857 vor der Versammlung der British Association[1]) eine andere Lösung gegeben, die der vorigen sehr ähnlich ist. Man hat, wenn man in irgend einer Ecke angekommen ist, stets zwei Wege zur Verfügung, deren einer links, deren anderer rechts abgeht. Wir wollen die Entscheidung, den Anfangsbuchstaben entsprechend, durch ein l oder r ausdrücken. Dann erhält unsere obige Normallösung folgende Bezeichnung:

B C D F G H J K L M N P Q R S T V W X Z B C
r r r l l l r l r l | r r r l l l r l r l

Auch hier besteht die zweite Reihe wieder aus zwei gleichen Hälften $(r\,r\,r\,l\,l\,l\,r\,l\,r\,l)^2 = [r^3\,l^3\,(rl)^2]^2$. Beginnt man also bei B, so hat man sich von C aus dreimal rechts, dann dreimal links, dann zweimal abwechselnd rechts und links zu wenden und diese Folge einfach zu

[1]) Gedruckt findet sich die Lösung bereits 1856 im Dezemberheft des Philosophical Magazine unter dem Titel: „Memorandum respecting a New System of Roots of Unity."

wiederholen. Die Methode giebt also wieder aus einer einzigen Lösung sämmtliche möglichen Lösungen.

Betrachten wir uns unseren obigen ersten Schnitt des Dodekaeders (Fig. 154), so sehen wir, daß man von B nach F über C und D kommen kann, wenn man zweimal rechts (rr) geht. Man gelangt aber auch auf Umwegen von B nach F, wenn man die Route BCPNMD wählt, welcher das Symbol lrrrl enspricht. Wir haben also die Gleichung rr = lrrrl, mit Hilfe deren wir eine selbstverständliche Rundreise rrrrr auf dem Fünfeck BCDFG zu einer vollständigen Rundreise erweitern können

$$\begin{aligned} \mathrm{rrrrr} &= \mathrm{rr} \quad \mathrm{rr} \quad \mathrm{r} \\ &= \mathrm{lrrrl} \quad \mathrm{lrrrl} \quad \mathrm{r} \text{ (zweimal)} \\ &= \mathrm{l} \ \mathrm{lrrrl} \ \mathrm{rl} \ \mathrm{l} \ \mathrm{lrrrl} \ \mathrm{rl} \ \mathrm{r} \text{ (zweimal)} \\ &= \mathrm{l} \ \mathrm{l} \ (\mathrm{lrrrl}) \ \mathrm{rl} \ \mathrm{rl} \ \mathrm{l} \ \mathrm{lrrl} \ \mathrm{rl} \ \mathrm{rl} \ \mathrm{r} \text{ (einmal)} \\ &= [\mathrm{l}^3 \, \mathrm{r}^3 \, \mathrm{lr} \, \mathrm{lr}]^2 \end{aligned}$$

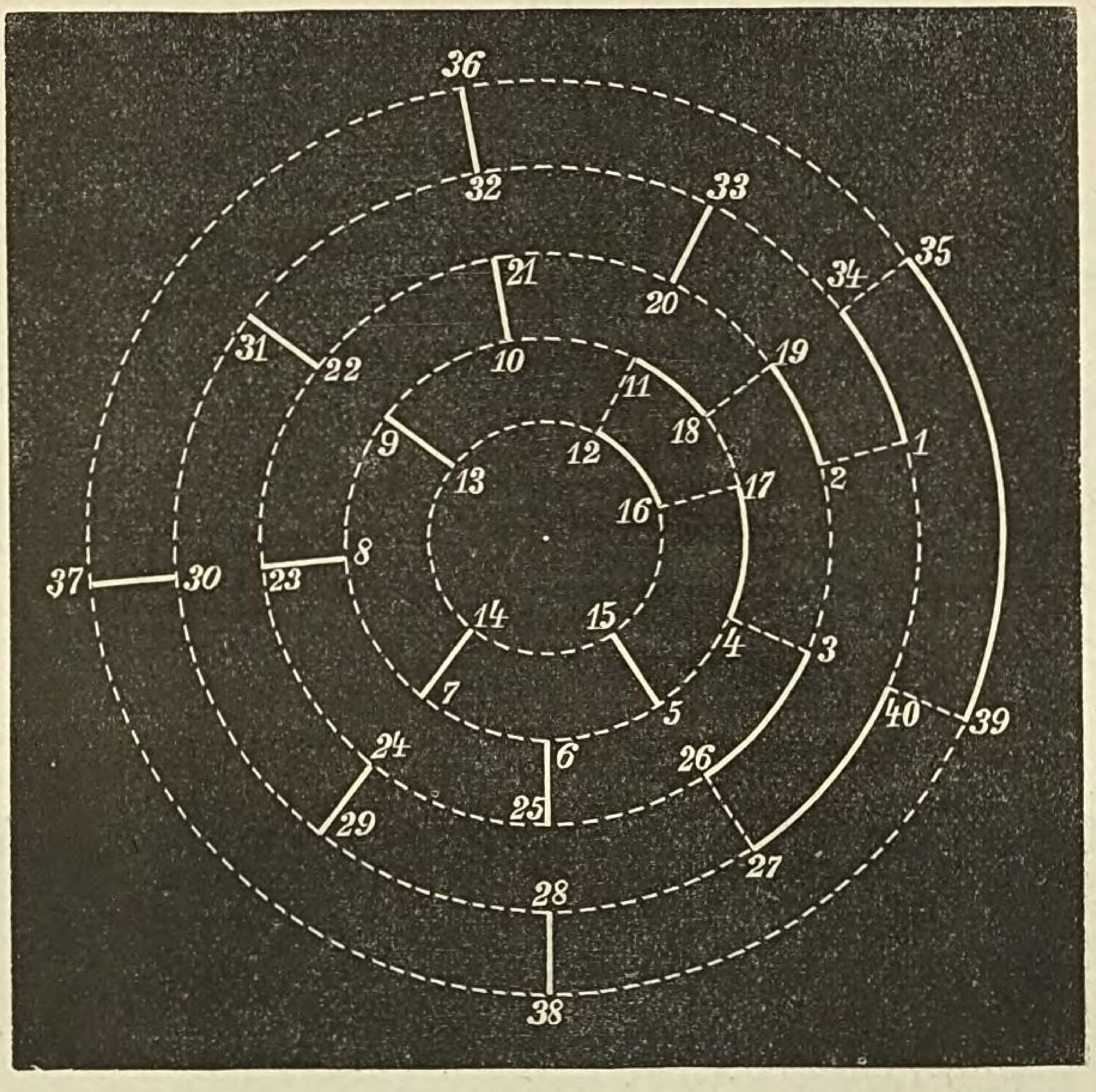
Diese letzte Reihe, welche aus der selbstverständlichen Reise rrrrr durch Erweiterung hervorgeht, ist aber identisch mit unserem oben gefundenen Cyklus, nur daß „rechts" und „links" vertauscht sind, was ja wegen der Symmetrie gleichgiltig ist.

Eine andere praktische Methode, die aber keinerlei theoretische Grundlage hat und den bisherigen daher an Tiefe und Eleganz nachsteht, hat Schubert in seiner bereits erwähnten Abhandlung vorgeschlagen. Er macht darauf aufmerksam, daß ja auf alle Fälle in praxi der Unterschied zwischen der Zahl der Orte und der der Wege kein sehr großer sein wird.[1]) Dieser Unterschied aber giebt die Zahl derjenigen Strecken an, die bei der Rundreise nicht berührt werden sollen. Es wird demnach nicht schwer sein, diese gemäß den früher erwähnten Vorschriften empirisch auszuscheiden. Es giebt sogar Fälle, wo die anderen Methoden uns im Stich lassen, wenn nämlich die Zahl der an einem Orte zusammenstoßenden Wege nicht immer die gleiche ist, wie z. B. bei Aufstellung eines Rundreiseplanes auf dem Eisenbahnnetz einer Landkarte. Man zählt dann sämmtliche von jedem Orte ausgehenden Bahnstrecken zusammen, teilt die Summe durch Zwei (weil jeder Weg in zwei

[1]) In der Hamilton'schen Aufgabe waren zwanzig Orte und dreißig Wege vorhanden; zehn Wege, also der dritte Teil, blieb unbenutzt.

Orte mündet) und subtrahirt diese Zahl von der Zahl der Orte. Dann schaltet man eine Anzahl Strecken aus, gleich der so gefundenen Differenz, wobei man darauf zu achten hat, daß bei jedem Orte mindestens zwei Stränge bleiben, da man ja den einen zur Einfahrt, den andern zur Ausfahrt benutzen muß. Jeder wird sich

Fig. 155.



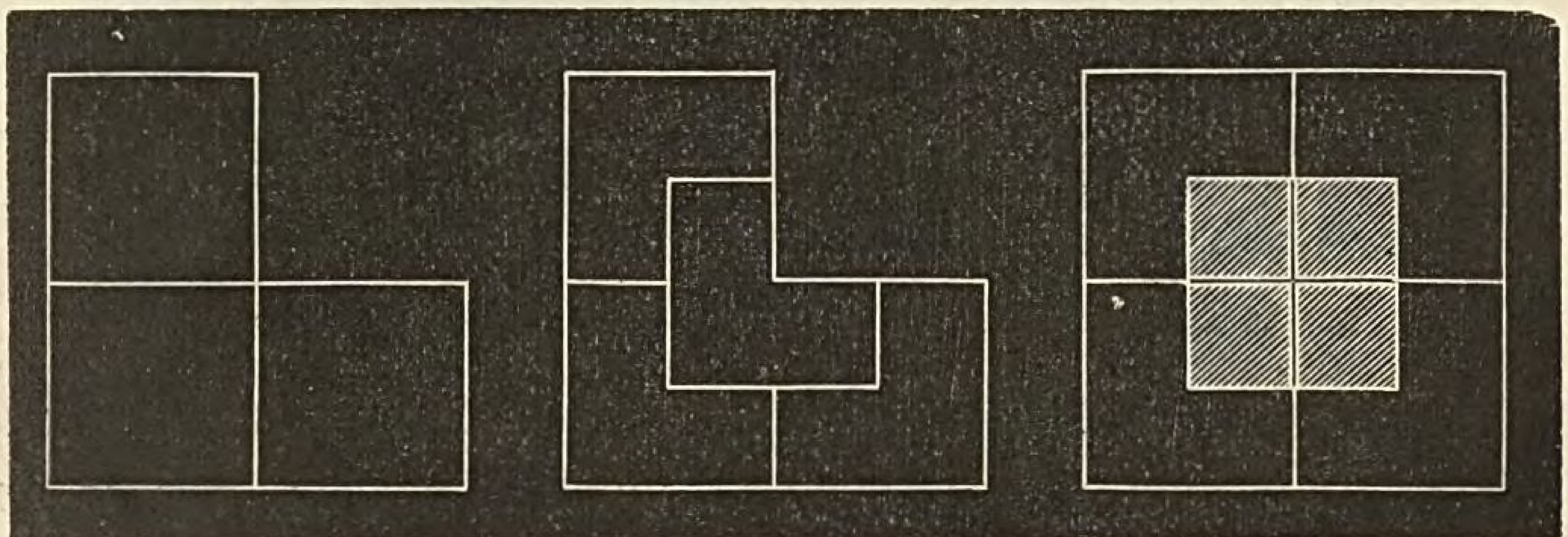
auf einer Karte leicht eine solche Aufgabe stellen können oder auch vielleicht im Sommer seine Fahrt so einrichten wollen, daß er von den in Aussicht genommenen Orten jeden nur *einmal* passirt. Wir lassen hier (nach Schubert) noch eine Figur (155) folgen, bei der die nicht zu befahrenden Strecken durch stärker gezogene Linien gekennzeichnet sind. Die Orte (1 bis 40) liegen der Einfachheit halber auf konzentrischen Kreisen, sechzig Wege verbinden sie, von denen der dritte Teil, also zwanzig, nicht benutzt wird.

14.

Legespiele.

Der römische Dichter Ausonius, welcher unseren Gelehrten besonders durch eine sprachlich nicht ungewandte Beschreibung einer Reise moselabwärts, von Trier (Augusta Treverorum) aus, bekannt ist und welcher im vierten Jahrhundert n. Chr. Geburt lebte, erwähnt bereits die chinesischen Spiele, bei denen es darauf ankommt, mit bunten Stäbchen oder Täfelchen gewisse Figuren herzustellen oder zu verwandeln. Quintilian erzählt uns, daß die Alten ihren Kindern die Buchstaben des Alphabets vermittelst Figuren aus Elfenbein lehrten, welche die Buchstaben darstellten. Durch Her-

Fig. 156.



a b c

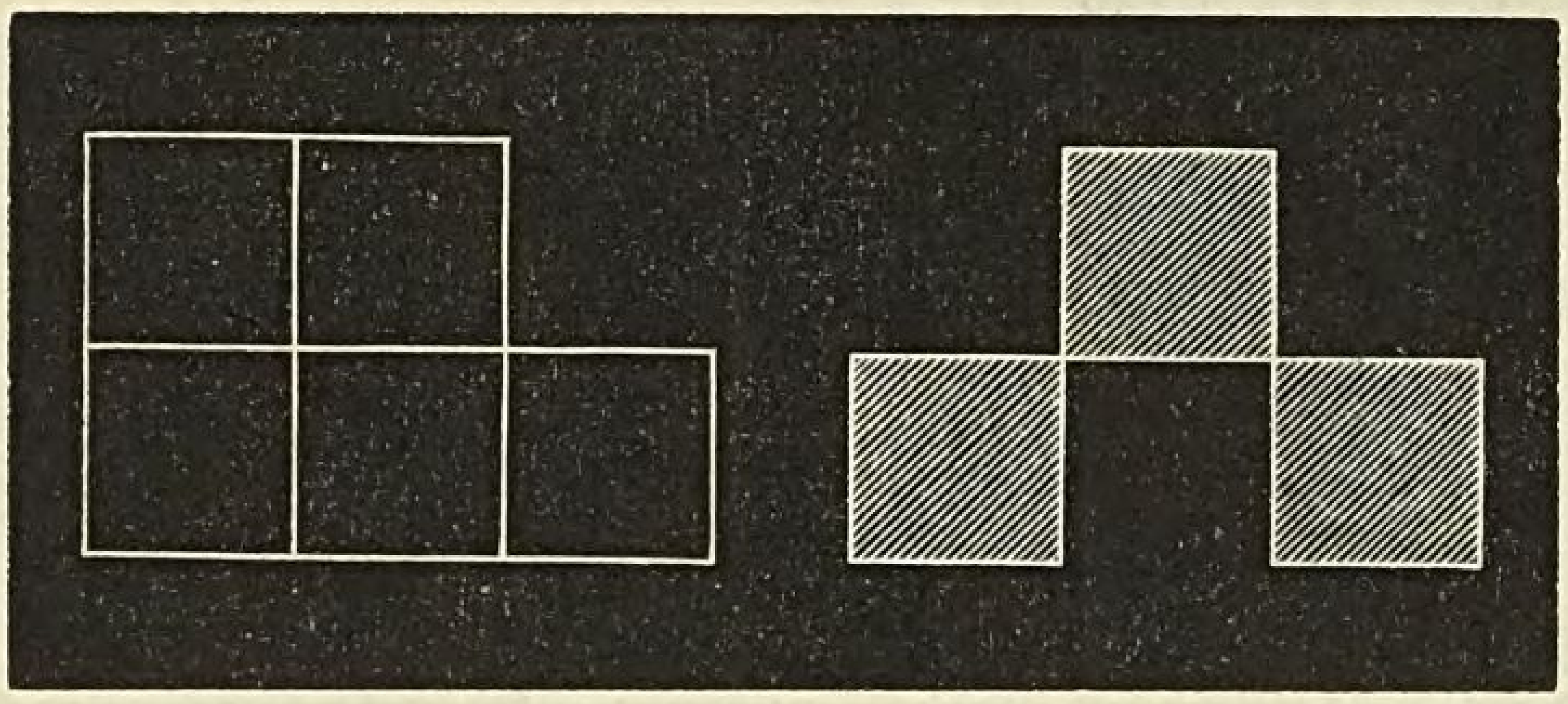
stellung der verschiedensten Kombinationen wurde daran das Lesen geübt. Wir werden im Folgenden eine Reihe solcher Probleme wiedergeben, die besonders zur Uebung des Verstandes und zum Nachweise der Richtigkeit geometrischer Verwandlungsaufgaben sich eignen.

Die Fig. 156 enthält in a drei gleiche Quadrate, welche in b durch Teilungslinien in vier kongruente Teile geteilt und in c zu einem neuen Quadrate zusammengefügt sind,

welches in seiner Mitte dasselbe leere quadratische Feld hat, wie die kleinen Quadrate des großen.

Die Fig. 157 wird mit fünfzehn Streichhölzern hergestellt und man behält nach Fortnahme von drei Hölzchen statt fünf Quadrate nur noch drei.

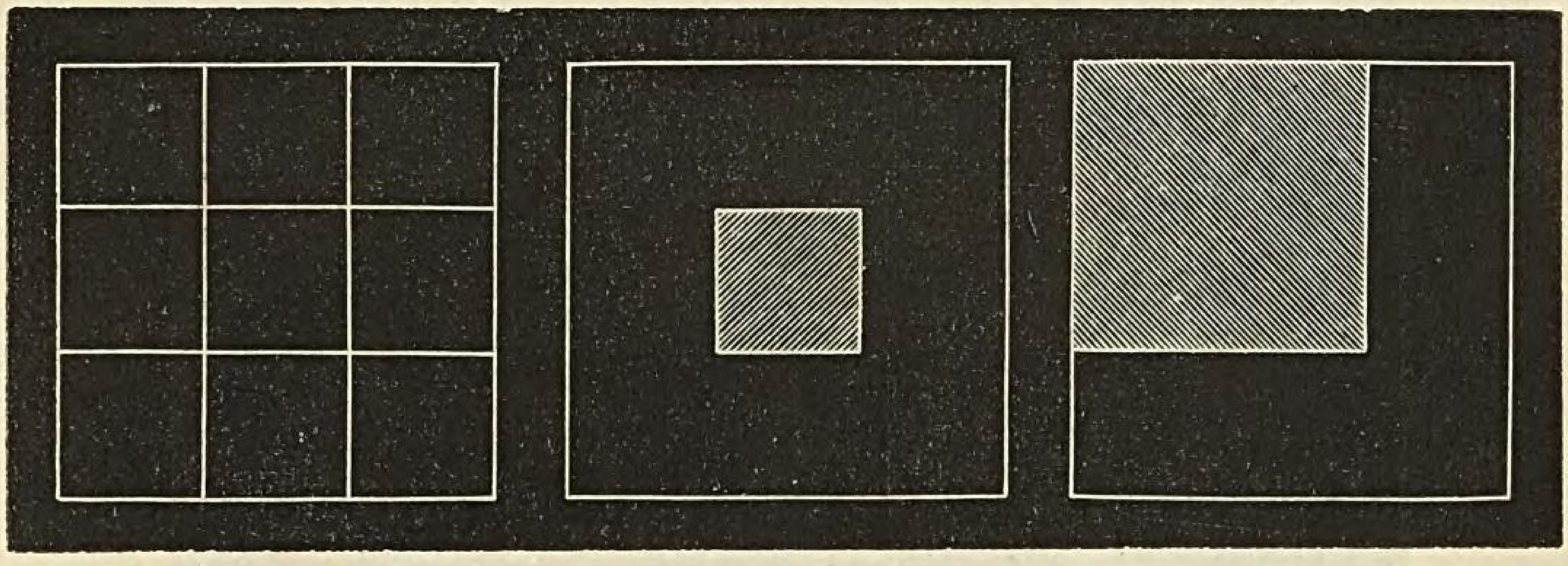
Fig. 157.



Die Fig. 158 ist aus 24 Stäbchen gebildet und enthält neun Quadrate. In den nächsten beiden Figuren 159 ist durch Fortnahme von je acht Hölzchen eine Form hergeleitet, die nur noch zwei Quadrate enthält.

Die Verwandlung eines Rechtecks in ein Quadrat in einfacherer Weise, als die Schulgeometrie es lehren kann, zeigen die beiden

Fig. 158. Fig. 159.

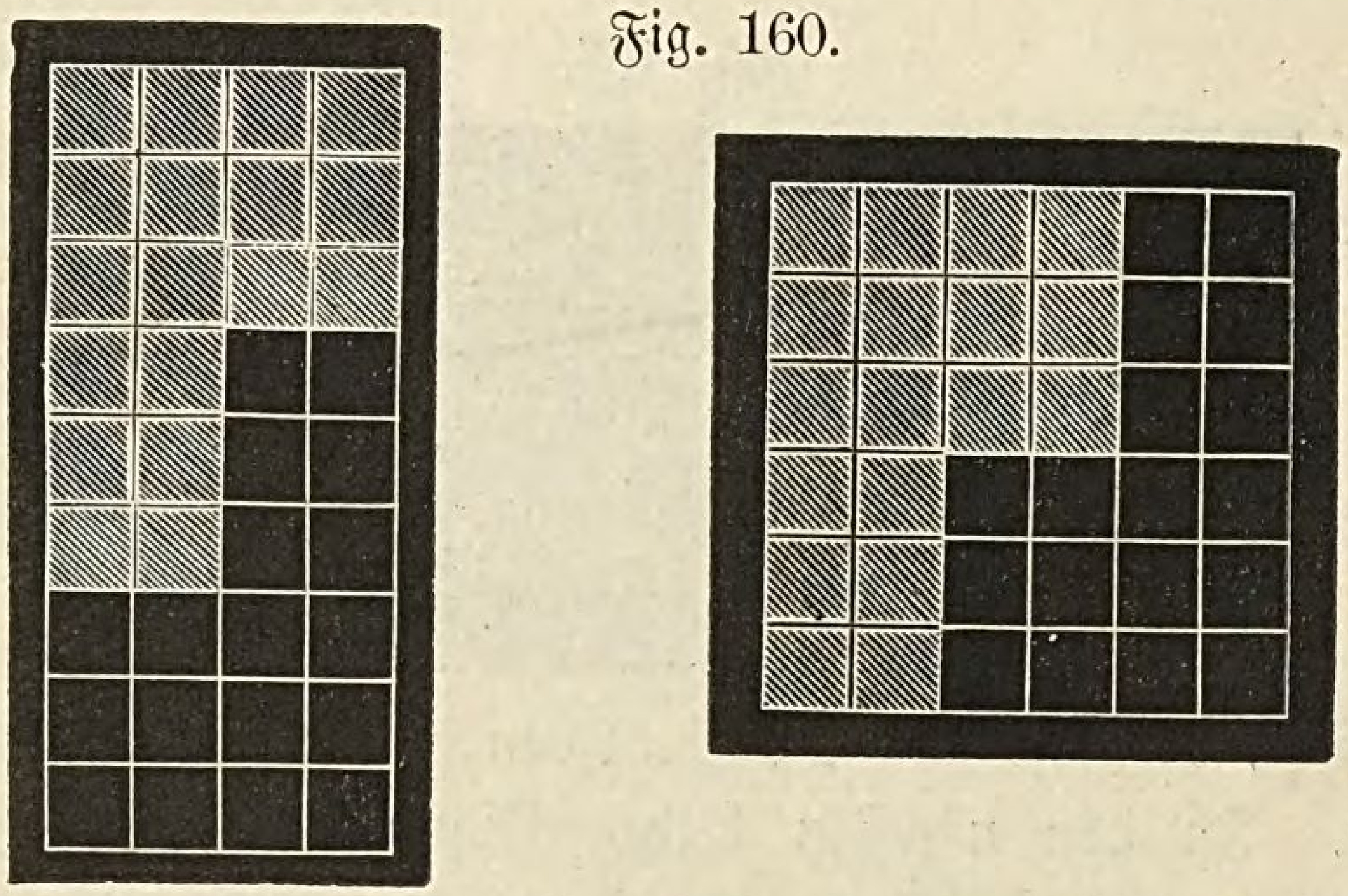


Figuren 160. Der Schnitt muß im Zickzack geführt werden und läßt sich auch leicht bei Rechtecken mit anderen Seitenzahlen als Vier und Neun ausführen.

Der einfachste Beweis des pythagoräischen Lehrsatzes wird in den beiden Figuren 161 gegeben. Man schneidet aus Karton zwei gleiche Quadrate und entfernt durch entsprechende Schnitte bei jedem vier kongruente Dreiecke. Dann bleiben einerseits zwei Quadrate, andererseits ein ihnen gleiches übrig. Letzteres hat als Seite die

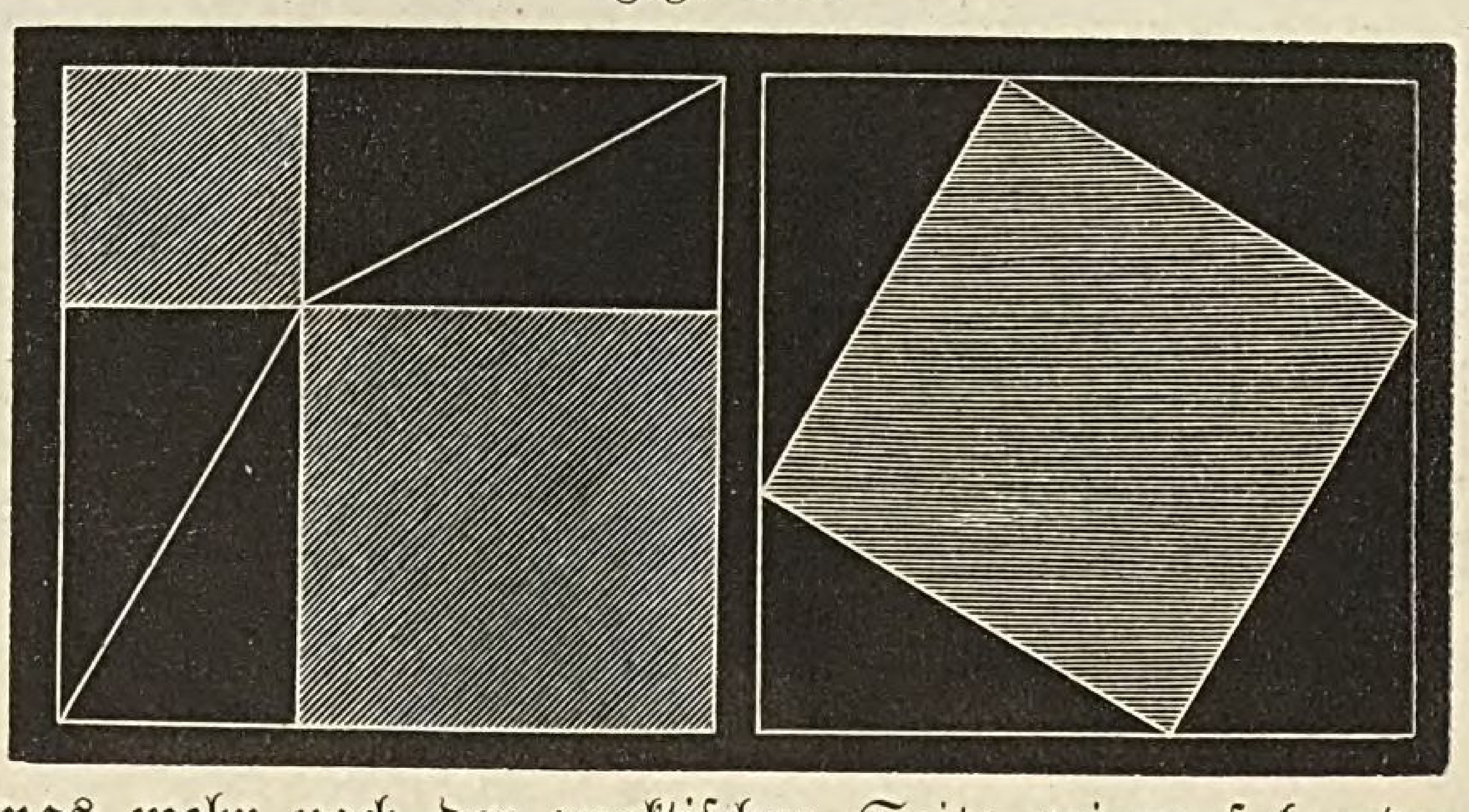
Hypotenuse eines der fortgeschnittenen rechtwinkeligen Dreiecke, erstere dagegen je eine Kathete desselben als Seite, so daß der berühmteste Satz des Alterthums, den aber der Erfinder selber zunächst wohl nur für das gleichschenkelig rechtwinkelige Dreieck gekannt hat, damit bewiesen ist.

Fig. 160.



Die Figuren 162 zeigen die Zerlegung eines einfachen Quadrats oder von vier zu einem Kreuz zusammengestellten Quadraten in zwanzig kongruente rechtwinkelige Dreiecke, deren Hypotenuse im ersten Falle gleich der halben Seite ist, während im zweiten Falle die größere Kathete mit der ganzen Quadratseite gleiche Größe hat.

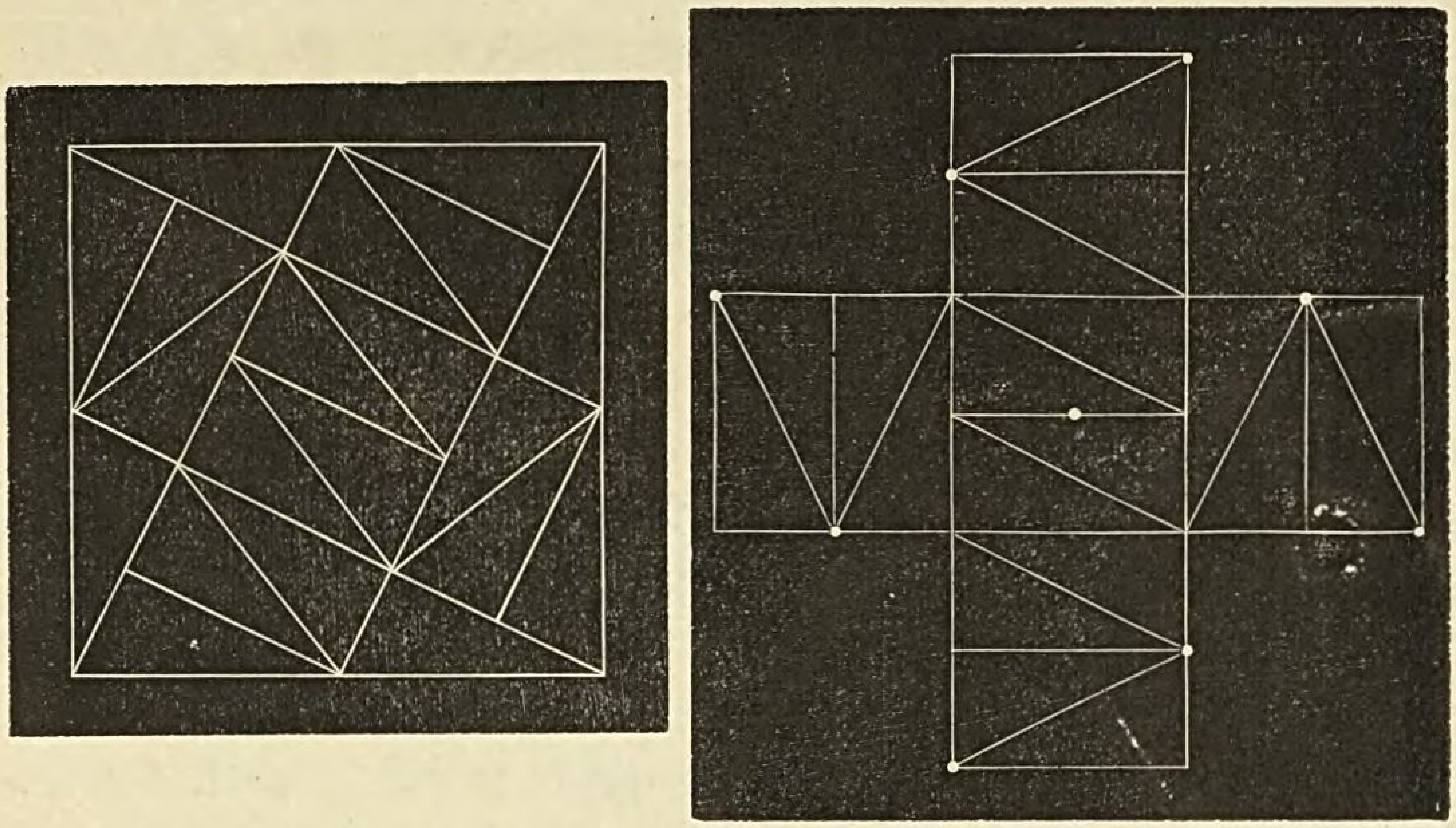
Fig. 161.



Etwas mehr nach der praktischen Seite neigen folgende kleinen Aufgaben. Ueber einen im Winkel geführten und überall gleich breiten Graben (Fig. 163) soll eine Brücke mit zwei Brettern, deren Länge genau gleich ist mit der Breite des Grabens, geschlagen werden. Die Figur zeigt, wie man die Biegung zur Lösung der Aufgabe benutzt. In Freund's Rätselschatz (Reclam's Universal-

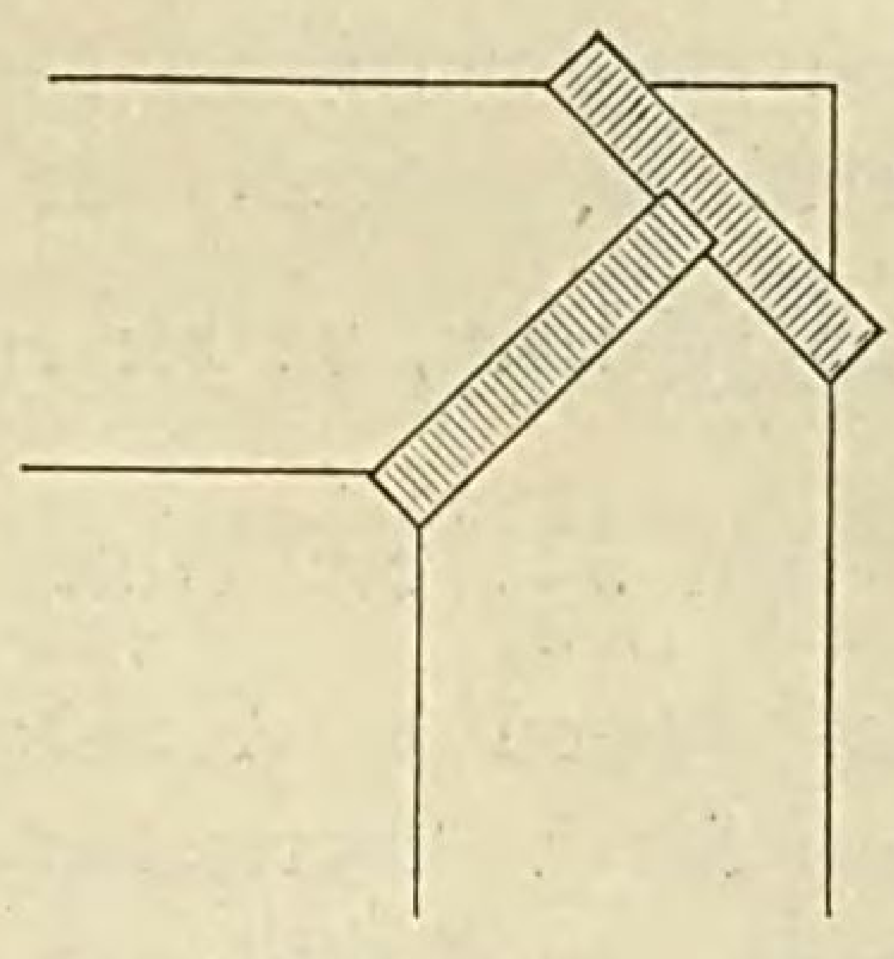
bibliothek: 2091, 2092, 2093, 2094) wird die folgende kleine Denkaufgabe behandelt. Zwei von entgegengesetzten Seiten kommende Züge (Fig. 164a) kreuzen sich an einer Weiche. Diese ist aber zu kurz, um einen der Züge ganz aufzunehmen. Wie können die Züge trotzdem an einander vorbeifahren? Erste Bewegung: Ein Teil

Fig. 162.



des Zuges A fährt in die Weiche; der Zug B fährt an den von A abgekoppelten Teil A′ heran. 2. Der auf der Weiche befindliche Teil von A, der ja die Maschine hat, fährt weiter und macht die Weiche frei. 3. B fährt mit dem Rest A′ von A vor, läßt diesen aber in dem von der Weiche umspannten Teile des Hauptgleises stehen und begiebt sich, eventuell den Hauptteil von A vor sich herschiebend, an seinen alten Platz, so daß er nun durch die Weiche seinen Weg fortsetzen kann. Dann werden A und A′ wieder verbunden und setzen ebenfalls ihren Weg fort. Fahren die Züge hintereinander her, so kann unter ähnlichen Umständen erreicht werden, daß der hintere an dem vorderen mit Hilfe eines Sackgleises vorüberfährt. Es fährt nämlich (Fig. 164b) ein Teil des vorderen Zuges A soweit in das Sackgleis, als dieses Platz bietet. Dann nimmt der zweite Zug B den Rest A′ soweit über die Weiche

Fig. 163.



hinaus mit, daß A das Sackgleis wieder verlassen und auf dem Hauptstrang zurückfahren kann. Nun wird der vorn befindliche Rest A' auf das Nebengleis gefahren, worauf dann der Zug B seinen Weg als vorderer Zug fortsetzen kann, wonach die Teile von A sich wieder vereinigen und hinterher fahren können.

Fig. 164a.



Fig. 164b.



Hier mögen noch zwei interessante Zahlenscherze Platz finden. Ein Araber stirbt und hinterläßt seinen drei Söhnen eine Anzahl von Kameelen, in welche jene sich so teilen sollen, daß der älteste die Hälfte, der zweite den dritten Teil, der dritte den neunten Teil erhält. Als man an die Teilung gehen will, stellen sich außerordentliche Schwierigkeiten ein, — denn es sind siebzehn Kameele vorhanden. Keiner der drei Söhne kann seinen Anteil erhalten, ohne daß eines der Kameele getötet und zerteilt wird. Sie kommen darüber in Streit. Ein Nachbar, der hinzukommt, verpflichtet sich, die Teilung so vorzunehmen, daß jeder zufriedengestellt ist. Er holt ein Kameel aus seinem Stalle herbei, stellt es als achtzehntes neben die anderen und läßt die Teilung vornehmen. Alle drei sind zufrieden, da der erste 9 Kameele erhält statt $8\frac{1}{2}$, der zweite 6 statt $5\frac{2}{3}$, der dritte 2 statt $1\frac{8}{9}$. Und siehe da — es bleibt das Kameel des Nachbarn, welches das letzte in der Reihe war, noch übrig. Worin lag der Fehler? Nun einfach daran, daß die Hälfte, ein Drittel und ein Neuntel zusammen kein Ganzes sind, sondern nur $\frac{17}{18}$. Setzt man daher $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{9}x = 17$, so ergiebt sich $x = 18$.

Ein indischer Nabob hinterläßt eine Reihe sehr wertvoller Edelsteine seinen sechs Söhnen. Er trifft die Bestimmung, daß der

erste den siebenten Teil und noch einen, der zweite den siebenten und zwei und so fort jeder folgende wieder denselben Teil des Restes und einen mehr, als der vorige, haben solle. Wie viel Steine waren es und wieviel erhält jeder der Söhne? Es ergiebt sich das merkwürdige Resultat, daß 36 Edelsteine vorhanden waren und daß jeder der Söhne gleichviel, nämlich sechs erhält. Man stelle 36 Halma- oder andere Figuren in Quadratform auf, schiebe die letzte Vertikalreihe unter die letzte Horizontalreihe, so hat man ein Rechteck mit den Seiten sieben und fünf und einen überstehenden Stein. Der erste Sohn nimmt den siebenten Teil, also fünf, und den einen, welcher übersteht. Nun schiebt man wieder die letzte Vertikalreihe wie vorhin unter die letzte Horizontalreihe, so hat man das Rechteck $4 \times 7 + 2$. Auch der zweite erhält also sechs und so fort; für den letzten bleiben genau sechs übrig. Das war vorauszusehen, da für den letzten doch kein siebenter Teil mehr vorhanden sein durfte.

Einige harmlose, auf Verschiebungen beruhende, kleine Täuschungen sind folgende: Eine alte Dame besitzt 25 kostbare Perlen und hat dieselben in Form eines Kreuzes so angeordnet, daß die mittlere Reihe 15 enthält, während je fünf so angelegt werden, daß fünf sich noch darüber in der mittleren Reihe befinden. Sie hat sich nun daran gewöhnt, immer von unten herauf die Perlen der Hauptarme und ebenso auch von unten beginnend die der Nebenarme des Kreuzes nachzuzählen. Jede Zählung endigt mit der Zahl 15. Ihrem Juwelier ist diese Art der Zählung bekannt und als ihm das Kreuz zur Reparatur übergeben wird, bringt er zwei Perlen in seinen Besitz, ohne daß die Dame bei der Rückgabe diesen Betrug bemerkt. Sie zählt nach wie vor auf dreierlei Art bis 15. Wie hat der Juwelier das bewerkstelligt? Nun, er hat die letzte Perle jedes Armes für sich behalten und die oberste Perle des mittleren Armes nach unten gebracht, so daß die Zählung jedesmal bei ihr beginnt. Man muß freilich, da die Form des Kreuzes geändert ist, eine recht kurzsichtige Dame voraussetzen; so auch bei der nächsten Aufgabe. Ein Kloster besitzt einen quadratischen Grundriß mit neun gleich großen Zimmern in Quadratform. Jedes wird von 3 Nonnen bewohnt, mit Ausnahme des mittleren, welches von der sehr kurzsichtigen Oberin bewohnt wird. Die 24 Nonnen

erhalten Besuch von vier fremden Nonnen, deren Anwesenheit der Oberin unbekannt bleiben soll. Die klugen Nonnen machen sich den Umstand zu Nutze, daß die Oberin stets ein mittleres Zimmer betritt und von hier aus konstatirt, daß in den drei Zimmern im Ganzen neun Personen vorhanden sind. Es begiebt sich also je eine Nonne aus einem Eckzimmer in das Mittelzimmer, wo auch für den Besuch ein Bett aufgeschlagen wird. Da nun in den vier Eckzimmern je zwei, in den Mittelzimmern je fünf Nonnen vorhanden sind, so wird die Oberin bei ihrer Revision befriedigt sein, da sie vom Mittelzimmer aus an jeder Seite neun Betten zählen wird. Wollten einmal vier Nonnen des Klosters verschwinden, so wurde einfach folgende Verteilung vorgenommen: je vier in einem Eckzimmer, je eine in jedem Mittelzimmer, so daß nur zwanzig Nonnen da sind, obgleich die von der Oberin vorgenommene Zählung scheinbar stimmt. Man erkennt leicht, wie man durch Leerung der Eckzimmer bis zur Zahl von 36 Nonnen gelangen kann. Es sind dann in jedem Mittelzimmer neun Nonnen vorhanden. Ob die Aebtissin nicht schließlich doch dahinter kommt? So ganz schwer ist es doch nicht. Aehnlich, wie der Oberin, ergeht es dem guten Rentner, der für seinen Wein einen quadratischen Verschlag mit neun Fächern angefertigt hat, deren mittleres unbenutzt bleibt. Er hat in jedem Mittelfach ursprünglich 21 Flaschen, während die Eckfächer leer sind. Der Diener kommt dahinter, daß der Herr stets so kontrollirt, daß er jede Seite für sich nachzählt. Er entnimmt daher der Reihe nach aus jedem Mittelfach eine Flasche und täuscht den Herrn darüber dadurch, daß er in jedes Eckfach eine Flasche legt. Der Herr glaubt nämlich, daß der Diener nur die Flaschen umgelegt habe und ist, da seine Rechnung stimmt, beruhigt, so daß der Diener, ermutigt, noch vier Flaschen entnimmt und noch eine weitere in jede Ecke legt, damit sie vom Herrn doppelt gezählt wird. Statt 84 besitzt der Herr jetzt nur noch 76 Flaschen und wenn er sehr schwer von Begriff ist, so kann noch der Fall eintreten, daß schließlich in jeder Ecke 10, im Mittelfach aber nur noch eine Flasche liegt. Dann ist sein Besitz auf 44 Flaschen zusammengeschmolzen und der Diener hat gerade so viel gestohlen, als noch in den Ecken liegen, nämlich 40 Flaschen.

Unser folgendes Legespiel kann mit Geldstücken, Streichhölzern

oder Spielmarken ausgeführt werden. Acht Gegenstände dieser Art liegen in einer Reihe und sollen paarweise so aufeinandergelegt werden, daß man je einen aufhebt und zwei überspringt. Zuletzt muß man vier Paare von Steinen haben. Man lege zuerst den fünften auf den zweiten, dann den dritten auf den siebenten. Dann kommt der zweite auf den ersten und der sechste auf den letzten. Das Ziel dieser Aufgabe scheint auf den ersten Blick leichter erreichbar, als es bei näherem Eingehen wirklich ist. Man kann es durch Vermehrung der Anzahl der Steine variiren, indem man die höhere Zahl dadurch vermindert und schließlich auf acht zurückführt, daß man stets den vierten auf den ersten Stein bringt und dadurch die Zahl um ein Paar verringert, da man sich um das am Anfang der Reihe liegende Paar nicht zu kümmern braucht. Nur

Fig. 165.

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
1	2	1	1	1	0	0	1	1	1	2	1
1	3	1	1	1	0	0	0	1	1	2	1
1	3	1	0	1	0	0	0	1	1	3	1
2	3	0	0	1	0	0	0	1	1	3	1
3	3	0	0	0	0	0	0	1	1	3	1
3	3	0	0	0	0	0	0	1	0	3	2
3	3	0	0	0	0	0	0	0	0	3	3

muß man nicht mehr, sobald nur noch acht Steine vorhanden sind, dasselbe Verfahren weiter anwenden: wenn man dann auf sechs Steine geführt wäre, würde die Lösung unmöglich sein.

Auch könnte man statt acht Steine zwölf nehmen und sie auf je vier Häufchen zu je drei zurückführen, wobei man nicht zwei, sondern drei Steine jedesmal zu überspringen hätte. Auch da wäre wieder eine Erweiterung mit 15, 18, 21 ..... Steinen denkbar, wobei man den fünften Stein zunächst auf den ersten bringen und sobald noch zwölf vorhanden sind, nach obigem Schema (Fig. 165) verfahren müßte.

Auf dem Schachbrett oder irgend einem anderen Felderbrett läßt sich ein Legespiel mit gleich vielen weißen und schwarzen Steinen ausführen, welches verlangt, die weißen mit den schwarzen durch Benutzung eines dazwischenliegenden leeren Feldes zu vertauschen. Man nennt dieses Spiel das Froschspiel (Fig. 166).

Fig. 166a.

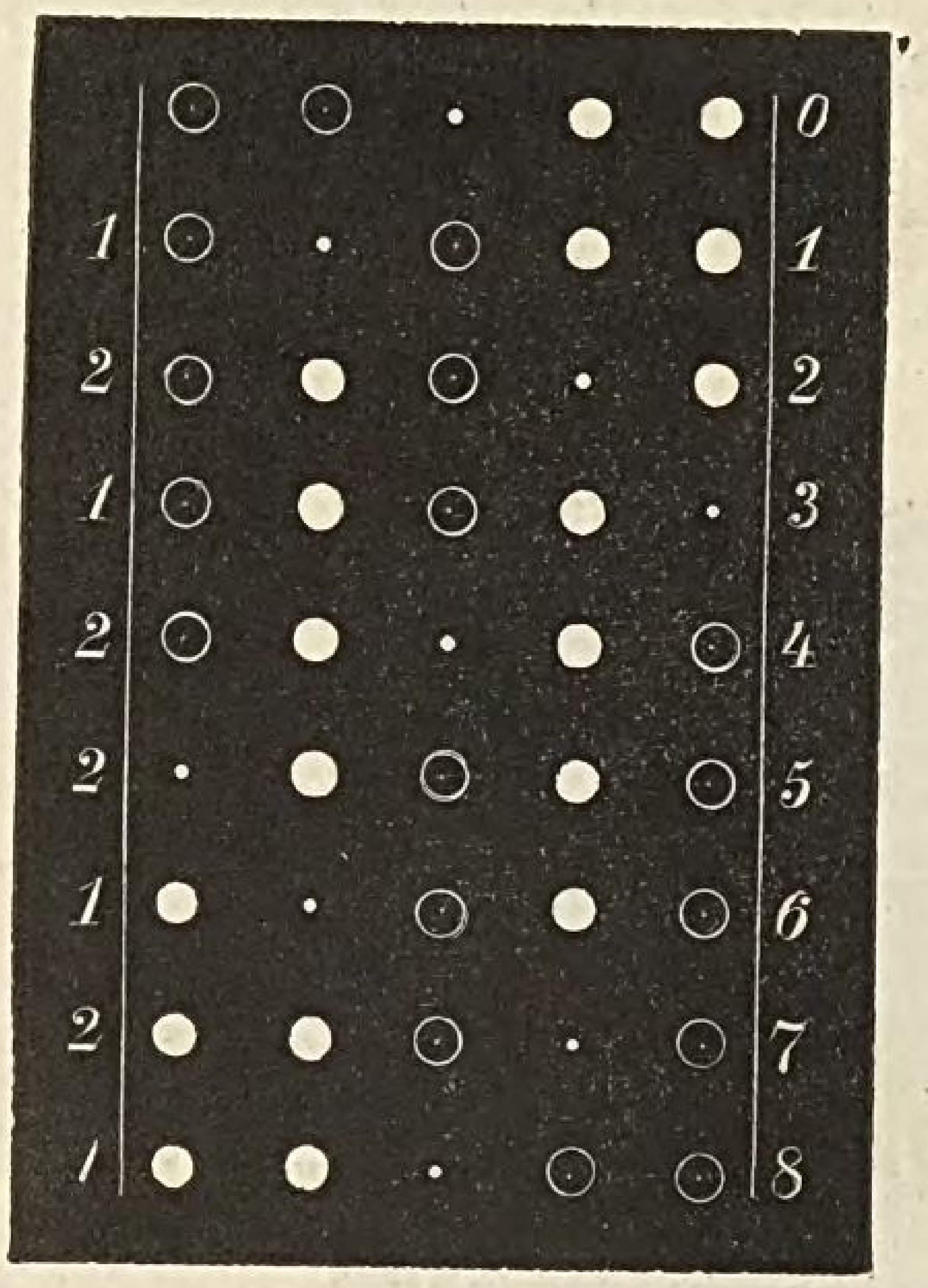
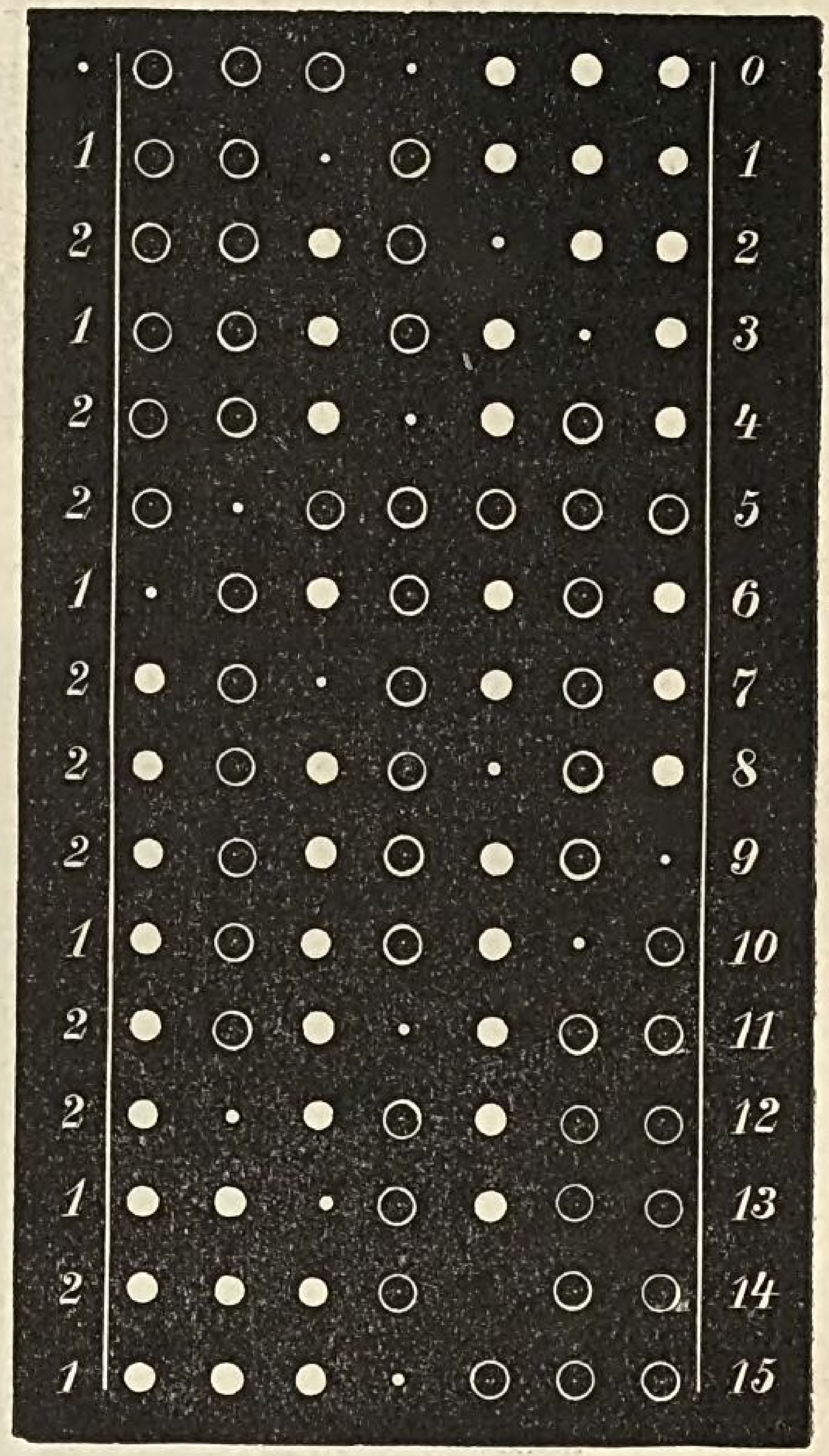


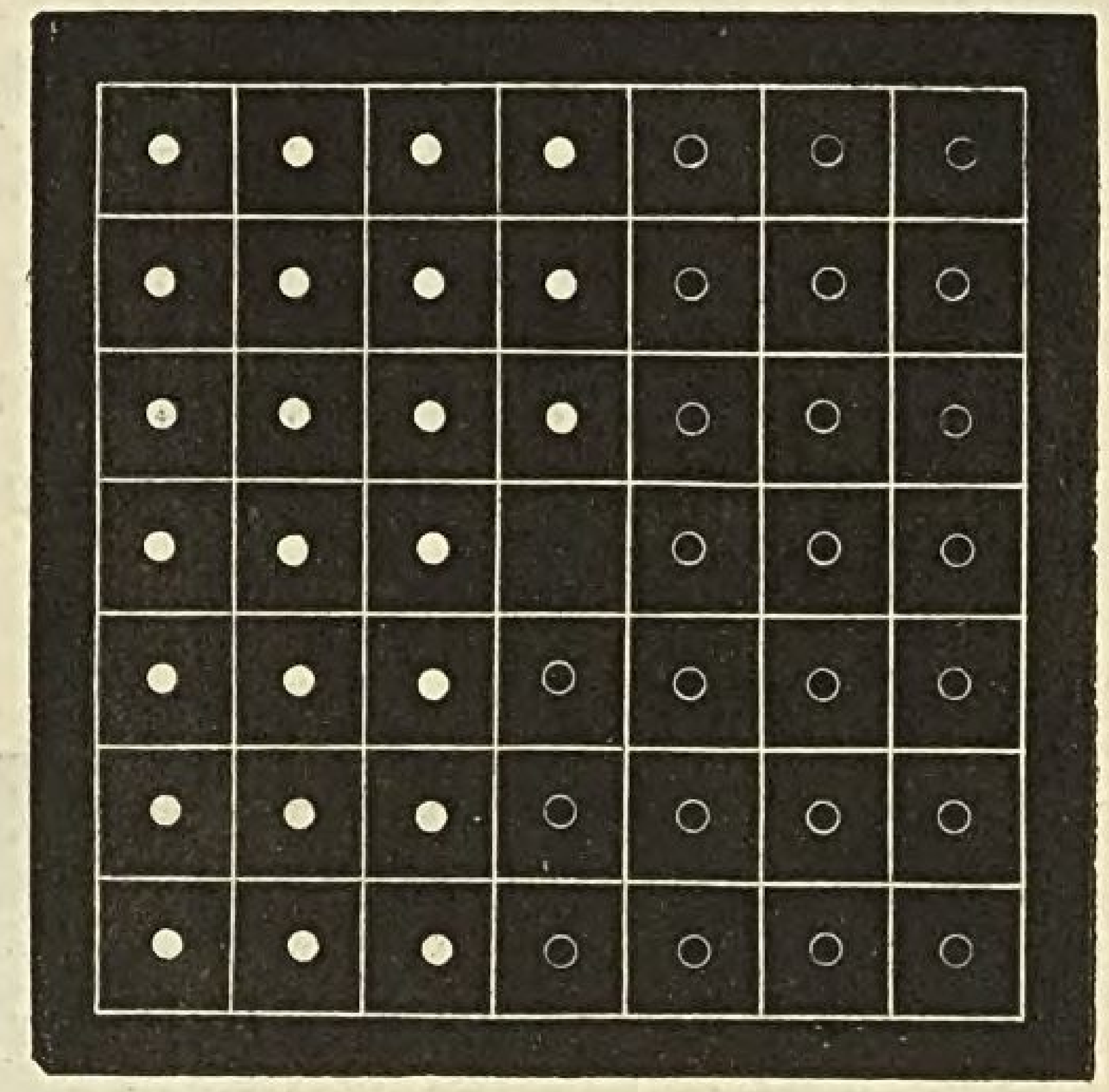
Fig. 166b.



Die Steine dürfen keine Schritte rückwärts machen, dagegen einen Stein der anderen Farbe in der Richtung ihrer Bewegung überspringen. Die Fig. 166a zeigt in der ersten Reihe zwei weiße und zwei schwarze Steine durch ein leeres Feld getrennt. Die Zahlen zur rechten bezeichnen die Zahl der Züge (acht im Ganzen), die zur linken geben an, ob ein Zug (1) oder ein Sprung (2) ausgeführt wurde. Diese letztere Zahl giebt im Wesentlichen die Lösung wieder und wir wollen für drei und vier Paar Steine, die wieder durch ein leeres Feld getrennt sein mögen, die Lösung nur andeuten, indem wir bemerken, daß bei folgender symmetrischen Zugfolge 1 2 1 2 2 1 2 2 2 1 2 2 1 2 1 fünfzehn Züge für drei

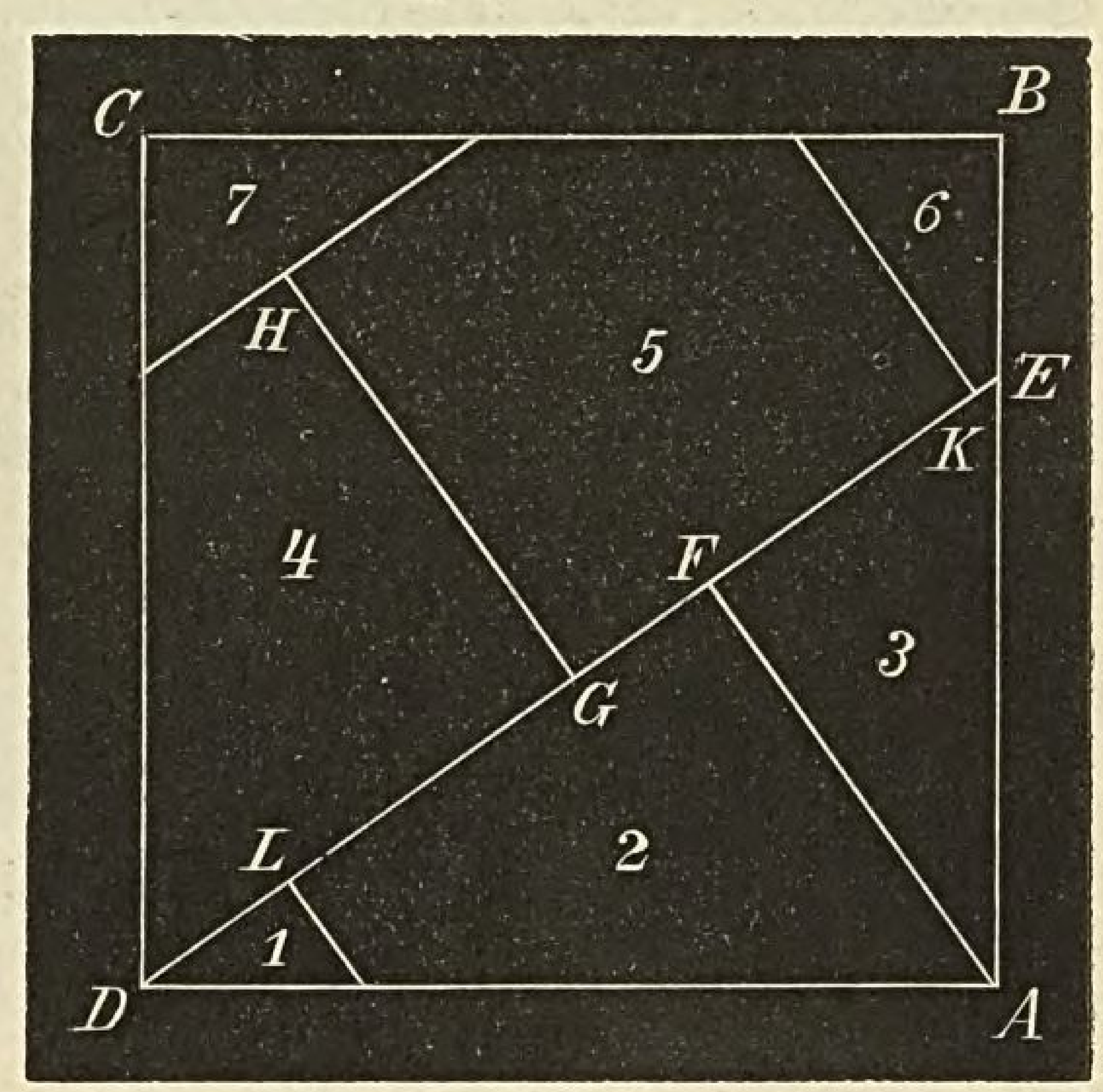
Paare (Fig. 166 b) und bei der Zugfolge 1 2 1 2 2 1 2 2 2 1 2 2, die sich symmetrisch wiederholen, fünfundzwanzig Züge für vier Paare erforderlich sind. Man bemerkt wohl das Gesetz, daß, die Anfangsstellung eingerechnet, für p Paare $(p+1)^2$ Stellungen nötig sind, unter denen sich 2 p einfache Züge und p^2 Sprünge befinden. Jeder Stein nämlich muß doch durchschnittlich $(p+1)$ Schritte machen, um an seinen Platz zu gelangen, also 2 p Steine machen $2p(p+1)$ Schritt. Diese Zahl erhält man thatsächlich, wenn man die doppelte Zahl der Sprünge $(2p^2)$ und die einfache Zahl der Züge 2 p addirt.

Fig. 167.



Noch interessanter vielleicht ist das nächste Geduldspiel: Man bedeckt ein Damebrett mit ungerader Seitenzahl (z. B. mit fünf oder sieben Feldern an jeder Seite) mit einer gleichen Anzahl schwarzer und weißer Steine, wie die Fig. 167 es zeigt. Das mittlere Feld bleibt leer und die Steine stehen zur Mitte symmetrisch. Die Farben sollen durch Züge vertauscht werden unter Beachtung derselben Regeln wie vorhin. Man muß die Steine reihenweise vertauschen und mit der mittleren horizontalen Linie beginnen, darauf mit der mittleren vertikalen Reihe fortfahren, sich jedoch, während man mit dieser beschäftigt ist, für die anderen horizontalen Reihen dabei den Umstand zu nutze machen, daß bei der Bewegung auf dem mittleren vertikalen Felde jedes Feld einmal leer ist. Diesen Augenblick benutzt man, um die betreffende horizontale

Fig. 168.

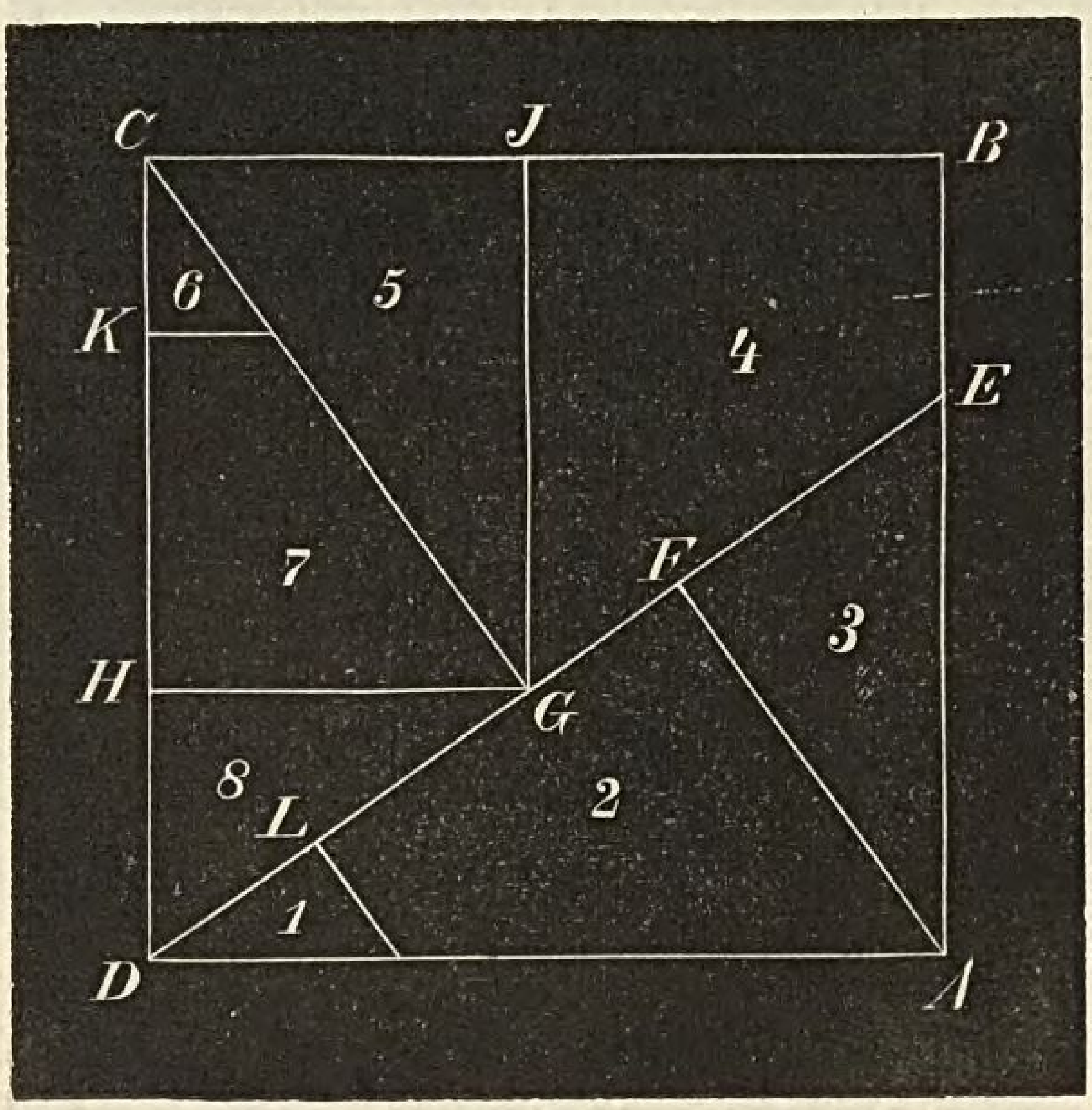


AE halbe Diagonale.
AF = HG = FL = GK.
$3+4=1+5=2+3+7$.

Reihe richtig zu rangiren. Demnach ist die Zahl der Stellungen in unserer Aufgabe achtmal so groß, als beim Platzwechsel in einer Linie vermehrt um eine Einheit. Für eine Linie mit 3 Paaren wären 15 Umstellungen erforderlich, für unsere Figur $8 \times 15 + 1 = 121$; allgemein für ein Quadrat mit $(2p + 1)^2$ Feldern bei p Paaren: $(2p + 2)(p^2 + 2p) + 1$ Stellungswechsel, also $2p(p + 1)(p + 2) + 1$. Dabei ist die Zahl der einfachen Schritte $4p(p + 1)$, die der Sprünge $p^2(p + 1)$.

Zum Schluß geben wir noch nach Lucas einige Verwandlungsaufgaben, die man am besten durch Ausschneiden aus Karten löst. Ein Quadrat von beliebiger Seitenlänge läßt sich so in sieben Teile zerschneiden, daß deren richtige Zusammenstellung drei gleiche kleinere Quadrate liefert. Diese Aufgabe wird in der Schulgeometrie mit Hilfe des Pythagoras gelöst. Hier (Fig. 168) trägt man die Hälfte der Diagonale auf einer Seite ab = AE, zieht DE, dann AF | DE und HG | DE so, daß sie verlängert durch C gehen würde; GH macht man = AF, ebenso GK und FL. In K und L errichtet man nach verschiedenen Seiten Lote. Nun kann man aus 3 und 4, aus 1 und 5 und aus 2, 6, 7 je ein gleiches Quadrat bilden. Die Seite dieser Quadrate ist offenbar das $\frac{1}{3}\sqrt{3} = 0{,}577\ldots$ fache der ersteren. Dieses Problem ist allgemein für eine beliebige Anzahl gleicher Quadrate behandelt und gelöst worden. In Fig. 169 ist ein Quadrat in acht Teile so geteilt worden, daß sich zweierlei Verbindungen mit den Teilen ausführen lassen. Erstens kann man aus 2 und 3 ein Quadrat und aus den übrigen Teilen ein zweites derart bilden, so daß letzteres den doppelten Inhalt besitzt. Zweitens

Fig. 169.

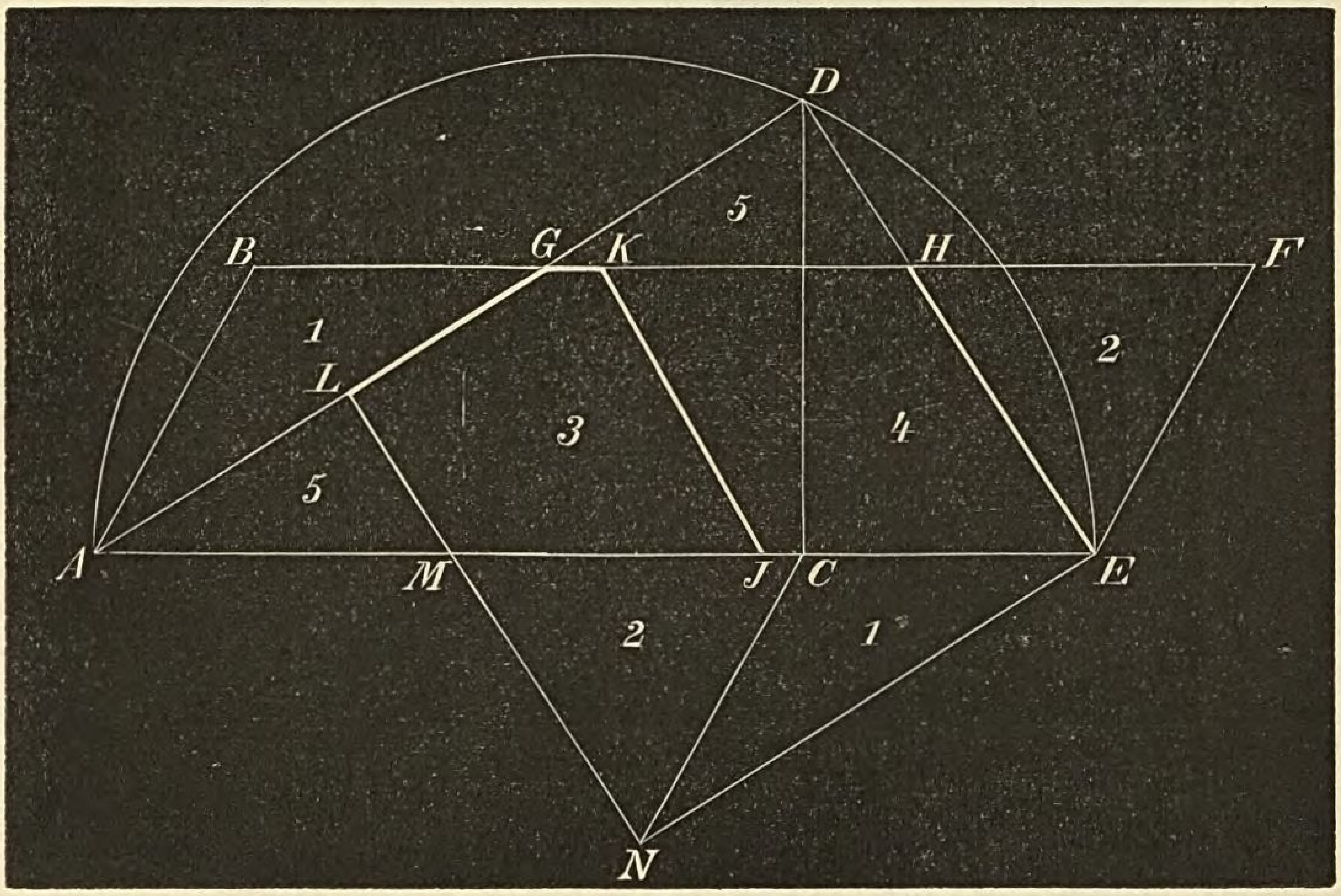


AE halbe Diagonale.
AF = FL; GH = HK.

kann man außer dem aus 2 und 3 gebildeten Quadrat zwei Quadrate zusammenstellen, deren kleines aus 7 und 8, deren großes aus 1, 4, 5 und 6 gebildet ist. Diese drei Quadrate haben dann das Verhältnis 2 : 3 : 4, da die beiden zuletzt gebildeten das Verhältnis 1 : 2 haben, während das bereits vorher gebildete Quadrat halb so groß war, als diese beiden ($1 : 1\frac{1}{2} : 2 = 2 : 3 : 4$). Diese acht Stücke, aus Karton geschnitten, bilden ein für Kinder ganz gut geeignetes Legespiel, da sich fünf verschiedene Quadrate daraus bilden lassen.

Man kann ein reguläres Sechseck (Fig. 170) in fünf Teile und ein reguläres Fünfeck (Fig. 171) in sieben Teile so zerschneiden, daß die Teile, passend zusammengesetzt, je ein Quadrat bilden.

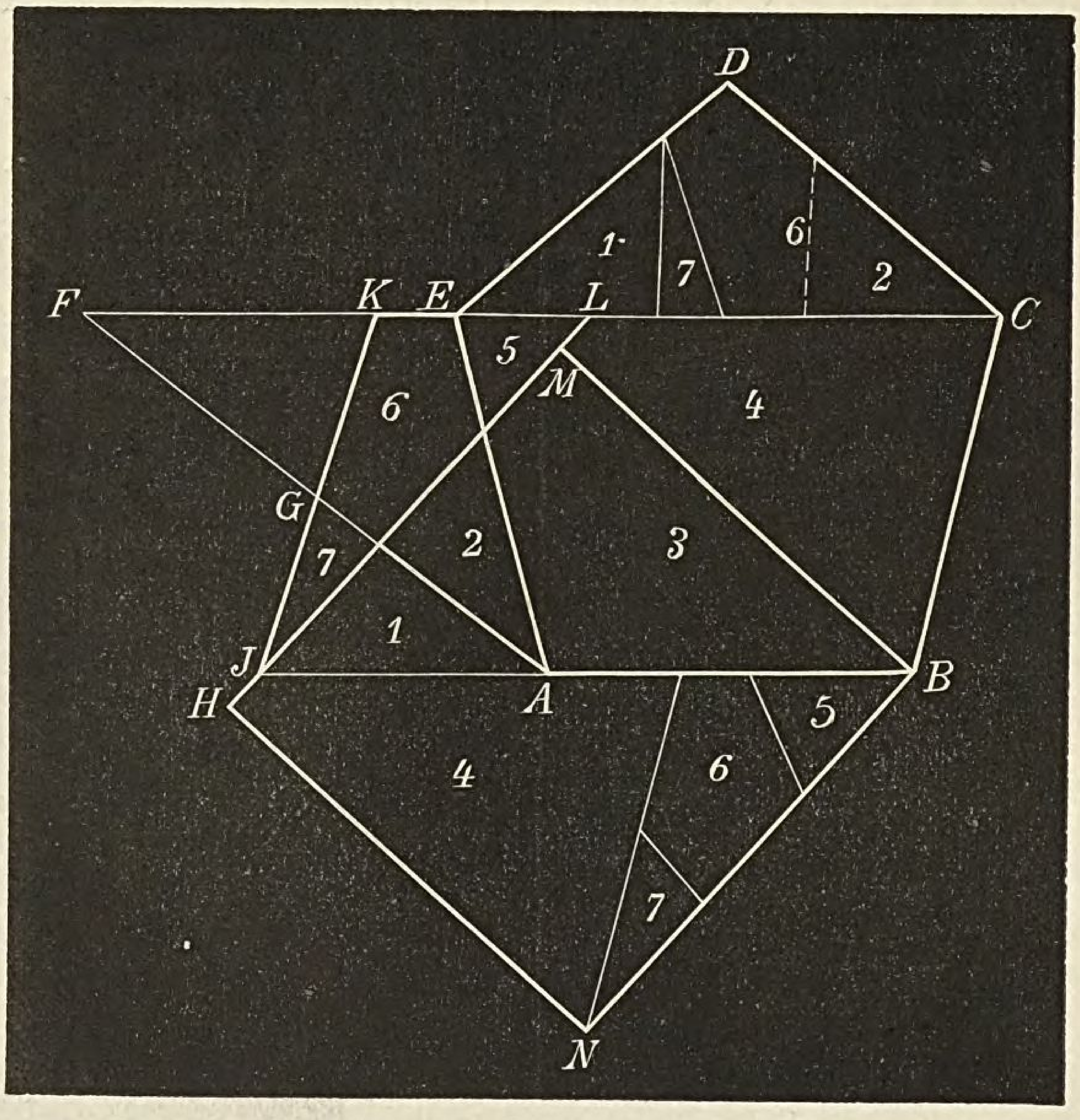
Fig. 170.



Man zerschneidet das Sechseck durch eine größere Diagonale in zwei gleiche Trapeze, die man mit ihren gleichen Schenkeln so aneinanderlegt, daß sie ein Parallelogramm ABEF bilden. Der Inhalt dieses Parallelogrammes ist gleich dem Produkt aus der Grundlinie AE und der Höhe. Zu diesen sucht man die mittlere Proportionale, indem man über AE einen Halbkreis schlägt, dann von E aus die Höhe bis C abträgt, und in C das Lot bis an den Halbkreis

zieht. Den dadurch erhaltenen Punkt D verbindet man nun mit A und E, so sind AE, EH und die Trennungslinie KJ der Trapeze Schnittlinien. Trägt man nun die Quadratseite DE auf DA bis L ab, so ist LM die letzte Schnittlinie und die erhaltenen fünf Teile (1 bis 5) bilden, richtig aneinandergelegt, das Quadrat DELN. Wir können aus den fünf Teilen ein Sechseck, ein Parallelogramm und ein Quadrat bilden.

Fig. 171.



Das reguläre Fünfeck über Seite AB bekommt man, wenn man AB um seinen größeren, durch stetige Teilung erhaltenen Abschnitt[1]) verlängert, mit dieser Summe von A und B Bögen schlägt (D) und über AD und BD mit AB als Schenkel gleichschenklige Dreiecke (C und E) zeichnet. Dann ist ABCDE das gesuchte Fünfeck. Die Diagonalen teilen sich wieder stetig und die Verlängerungen der Seiten bis zum Schnittpunkt geben wieder die Diagonalen. Alles dieses rührt daher, daß nur zwei Arten gleichschenkliger Dreiecke vorkommen. In der ersteren ist der Winkel an der Spitze

[1]) Siehe Abschnitt 1, S. 21.

36°, in der zweiten derjenige an der Basis. Im ersten Falle ist die Basis größerer Abschnitt des stetig geteilten Schenkels, im zweiten der Schenkel größerer Abschnitt der stetig geteilten Basis.

Das Fünfeck ABCDE verwandelt man in das Trapez ABCEF, indem man die Diagonale CE um die Seite bis F verlängert. Dieses Trapez wird ein Parallelogramm, KJBC, wenn man durch die Mitte G von AF eine Parallele zu BC zieht. Jetzt führt man mit BCJK dieselbe Konstruktion wie vorhin durch und findet so den Punkt M. Dann ist BM die Quadratseite und man hat, wie die Figur zeigt, wenn man noch JM zieht und bis L verlängert, sieben Teile des Parallelogrammes, aus denen man dann sowohl das Fünfeck, wie auch das Quadrat HMBN bilden kann. Es ist ABCDE gleich Trapez ABCF gleich Parallelogramm BCJK. Nun wird über JB ein Halbkreis geschlagen und die mittlere Proportionale BM zur Grundlinie und Höhe des Parallelogramms gesucht. Diese ist die Seite des gesuchten Quadrates BMNH. Durch diese Konstruktion haben sich nun die Schnittlinien des Parallelogramms BCKJ ergeben und somit die Teile 1 bis 7, aus denen sich das Fünfeck, das Trapez, das Parallelogramm und das Quadrat zusammensetzen lassen, wie die Figur es angiebt.

15.

Die acht Königinnen im Schachspiel.

Dieses Problem behandelt die Lösung folgender Aufgabe: „Alle Arten zu bestimmen, um acht Königinnen auf dem gewöhnlichen Schachbrett mit 64 Feldern so aufzustellen, daß keine Königin von einer andern genommen werden kann. Mit anderen Worten, die acht Königinnen so auf acht Feldern des Schachbrettes aufzustellen, daß irgend zwei von ihnen niemals weder auf einer zu den Rändern noch zu einer der Diagonalen parallelen Linie liegen."

Die Aufgabe ist von Nauck an Gauß mitgeteilt worden: dieser hat darüber mit dem Astronomen Schumacher einen Briefwechsel gehabt. Gauß fand anfangs 72, dann 76 Lösungen. Schließlich erkannte er, daß es 92 Lösungen gäbe und fand dieselben auch. Prof. S. Günther (München) hat in dem XVI. Bande (p. 291—292) des „Archiv der Mathematik und Physik" (Grunert) eine interessante Geschichte dieser Aufgabe gegeben und darin gleichzeitig eine neue Methode mitgeteilt, um zur Lösung des Problems zu gelangen, indem er annahm, daß das gewöhnliche Schachbrett von 64 Feldern ersetzt sei durch ein Schachbrett von beliebiger Größe. Für die Bretter mit 16 und 25 Feldern (vier und fünf Königinnen) hat er die Lösung gegeben. Prof. J. W. Glaisher (Cambridge) hat in dem „Philosophical Magazine" nach derselben Methode die Lösung für sechs, sieben und acht Königinnen auf einem Schachbrett von 36, 49 und 64 Feldern gefunden und mitgeteilt.

Später ist diese Aufgabe noch von anderen, denen die bisherigen Lösungen unbekannt waren, behandelt worden.

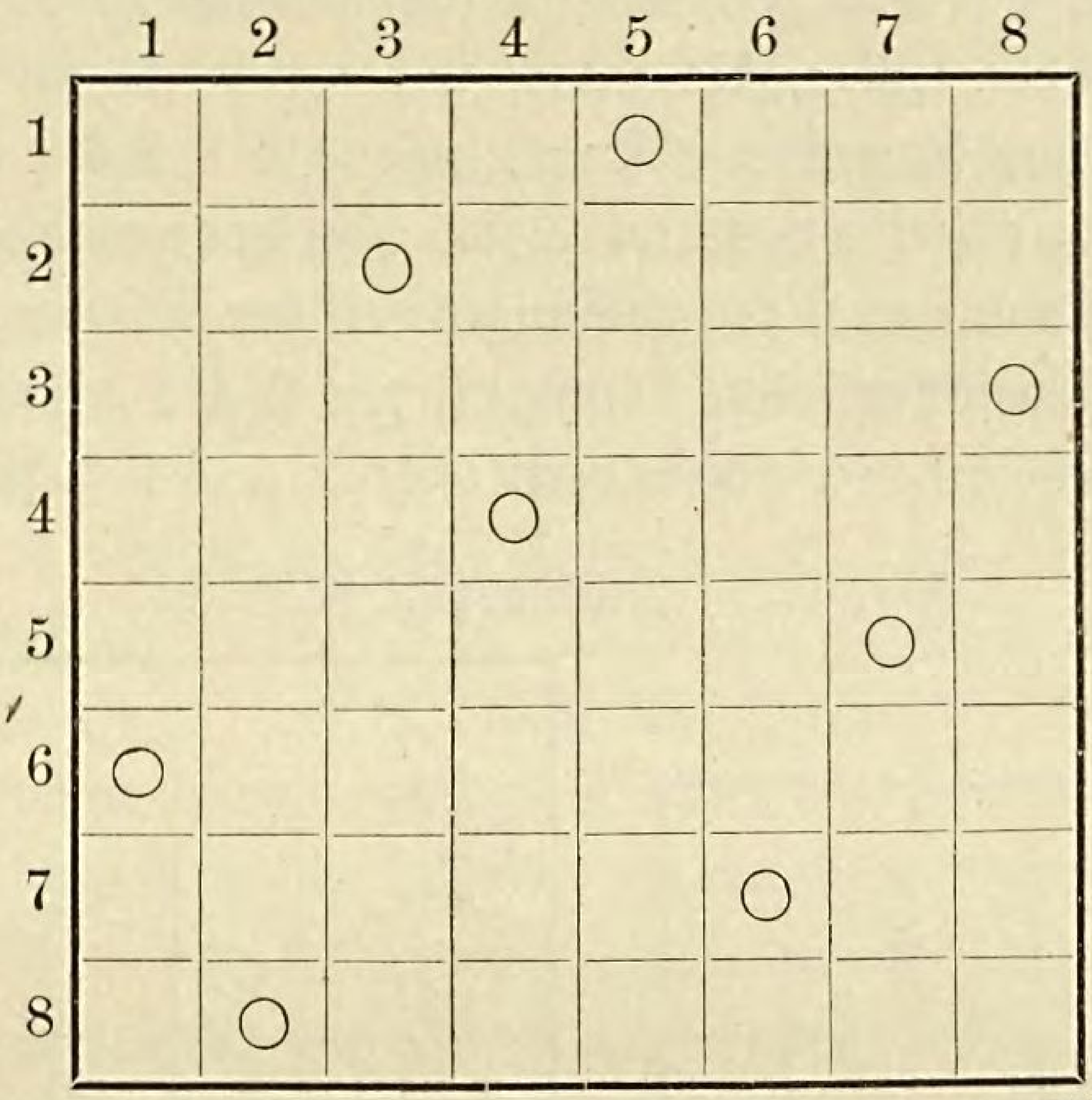
Wir wollen im Folgenden die Stellungen auf den Feldern des Schachbrettes folgendermaßen bezeichnen. In der Ziffernfolge

6 8 2 4 1 7 5 3 soll die Zahl 6 die Zeile bedeuten, in welcher die Königin sich in der ersten senkrechten Reihe befindet, die nächsten Zahlen bezeichnen ebenso die Höhe in der zweiten, dritten u. s. f. Reihe. Die Lösung sieht also so aus (Fig. 172):

Zeile: 6 8 2 4 1 7 5 3
Reihe: 1 2 3 4 5 6 7 8

Dreht man nun das Blatt entgegengesetzt der Bewegung des Uhr-

Fig. 172.



1. Von oben links aus nach unten: 6 8 2 4 1 7 5 3
2. Von oben rechts aus nach links: 4 6 1 5 2 8 3 7
3. Von unten links aus nach oben: 3 1 7 5 8 2 4 6
4. Von unten links aus nach rechts: 5 3 8 4 7 1 6 2

Alle vier Fälle stellen ein und dieselbe Lösung dar. Eins ist mit drei, zwei mit vier komplementär.

zeigers, so hat man ja noch dieselbe Lösung; sie wird aber jetzt, wenn wir dieselbe Lage des Blattes beibehalten, geschrieben:

Zeile: 8 7 6 5 4 3 2 1
Reihe: 4 6 1 5 2 8 3 7

Bei weiterer Vierteldrehung in demselben Sinne würde man noch eine dritte und vierte Lösung hinschreiben können:

6 4 2 8 5 7 1 3 und 2 6 1 7 4 8 3 5.

Es sind, wie man sieht, dieselben Lösungen wie die beiden ersten, nur daß die Reihen in umgekehrter Reihenfolge genommen und die Zeilen ebenfalls statt von unten, von oben gezählt sind. Schreiben

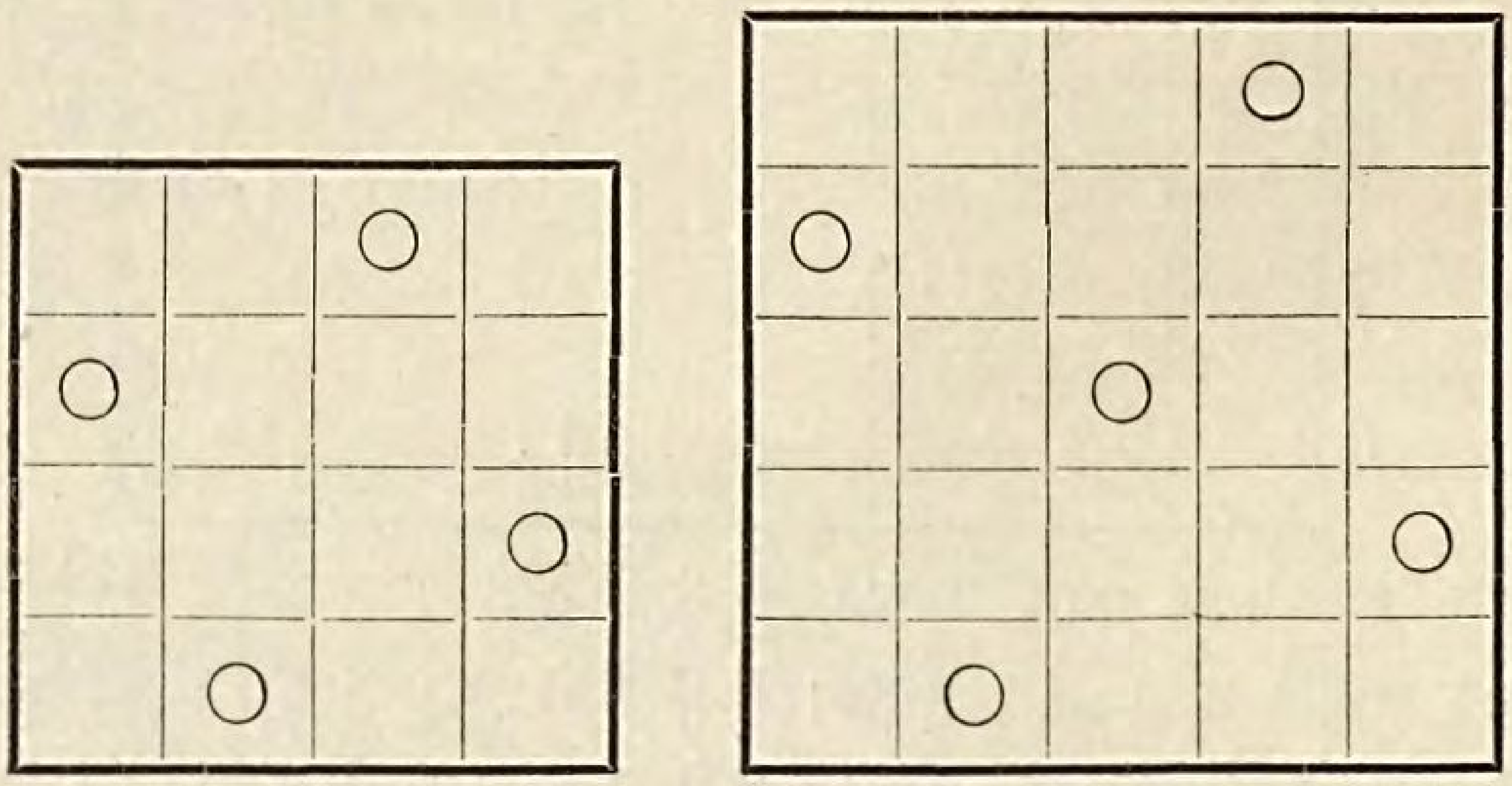
wir die erste und zweite Lösung daher in umgekehrter Reihenfolge und die letzte Lösung darunter, so sieht man, daß sich alle Zahlen der Reihe nach zu 9 ergänzen:

3 5 7 1 4 2 8 6   5 3 8 4 7 1 6 2
6 4 2 8 5 7 1 3   4 6 1 5 2 8 3 7

Jede Lösung giebt im allgemeinen vier Zahlenlösungen. In besonderen Fällen jedoch erhält man weniger Lösungen. So giebt die Lösung: 4 6 8 2 7 1 3 5 als Umkehrung wieder genau dieselbe Lösung, da ihre Zahlen sich symmetrisch zu Neun ergänzen, die erste mit der letzten, die zweite mit der vorletzten und so fort.

Es soll eine derartige Lösung, wie 4 6 8 2 7 1 3 5, bei der die Umkehrung dasselbe Resultat giebt, *halbregelmäßig* genannt werden, da sie nur noch zwei Lösungen bei der Drehung des Brettes giebt. Dagegen sollen solche Lösungen, wie 2 4 1 3 (siehe Fig. 173) für das Schachbrett von 16 Feldern oder 2 5 3 1 4 für ein solches

Fig. 173. Regelmäßige Lösungen.



2 4 1 3   2 5 3 1 4

von 25 Feldern *regelmäßige* genannt werden, da sie keine neue Lösung bei der Drehung geben. Solche regelmäßige Lösungen können nur vorkommen, wenn die Zahl der Felder auf jeder Seite gleich vier oder einem Vielfachen derselben ist, oder wenn sie diese Vielfachen um eine Einheit übertrifft. Die halbregelmäßigen Lösungen sollen im Folgenden mit *einem* Sterne, also * 4 6 8 2 7 1 3 5, die regelmäßigen mit *zwei* Sternen, also ** 2 4 1 3, bezeichnet werden. *Umgekehrte* Lösungen sollen solche heißen, bei denen die Zahlen in umgekehrter Reihenfolge auftreten, als ob wir das Spiegelbild hingeschrieben oder das ganze Brett auf den Rücken gelegt und dann notirt hätten. Zählen wir auch diese Lösungen

mit, so giebt jede unregelmäßige Lösung acht Zahlenfolgen, jede halbregelmäßige vier und jede regelmäßige zwei. Das Schachbrett mit einem Felde bildet natürlich einen Fall für sich.

Der der Königin verstattete Weg ist zugleich derjenige des Turmes und des Bauern, da der Turm sich parallel den Seiten, der Bauer parallel der Diagonale bewegen darf. Es ist daher klar, daß unter der Zahl der Lösungen, die sich für acht Türme und für acht Bauern unter derselben Bedingung ergeben würden, Lösungen unserer Aufgabe mit enthalten sein werden. Das Problem der acht Türme, welche so aufzustellen sind, daß sie sich gegenseitig nicht nehmen können, deckt sich mit der arithmetischen Aufgabe, die acht ersten Zahlen auf alle möglichen Arten zu permutiren, wenn wir dieselbe Bezeichnungsweise für die Lösungen, wie oben, beibehalten. Diese Anzahl ist für das Schachbrett von neun Feldern sechs, nämlich 1 2 3, 1 3 2, 2 1 3, 2 3 1, 3 1 2, 3 2 1, und folglich für 16 Felder viermal so groß, also 24, da man jeder vorigen Lösung eine „Vier" an beliebigem Platze hinzufügen kann. Für das Schachbrett, dessen Seite acht Felder hat, ist die Anzahl der Permutationen bereits $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 = 40320$ und für ein solches mit 10 Feldern an der Seite 3 628 800. Wenn die Vertauschung der Buchstaben eines Wortes ein neues Wort ergiebt, so nennt man das ein Anagramm. So ist das Wort Algorithmus ein Anagramm des Wortes Logarithmus. Berühmte Anagramme sind „C'est l'enfer, qui m'a créé", welches aus „frère Jacques Clément"[1]) sich bilden läßt und „Un veto corse la finira"[2]) (Ein korsisches Veto wird sie beendigen) ist ein Anagramm von „Révolution française".

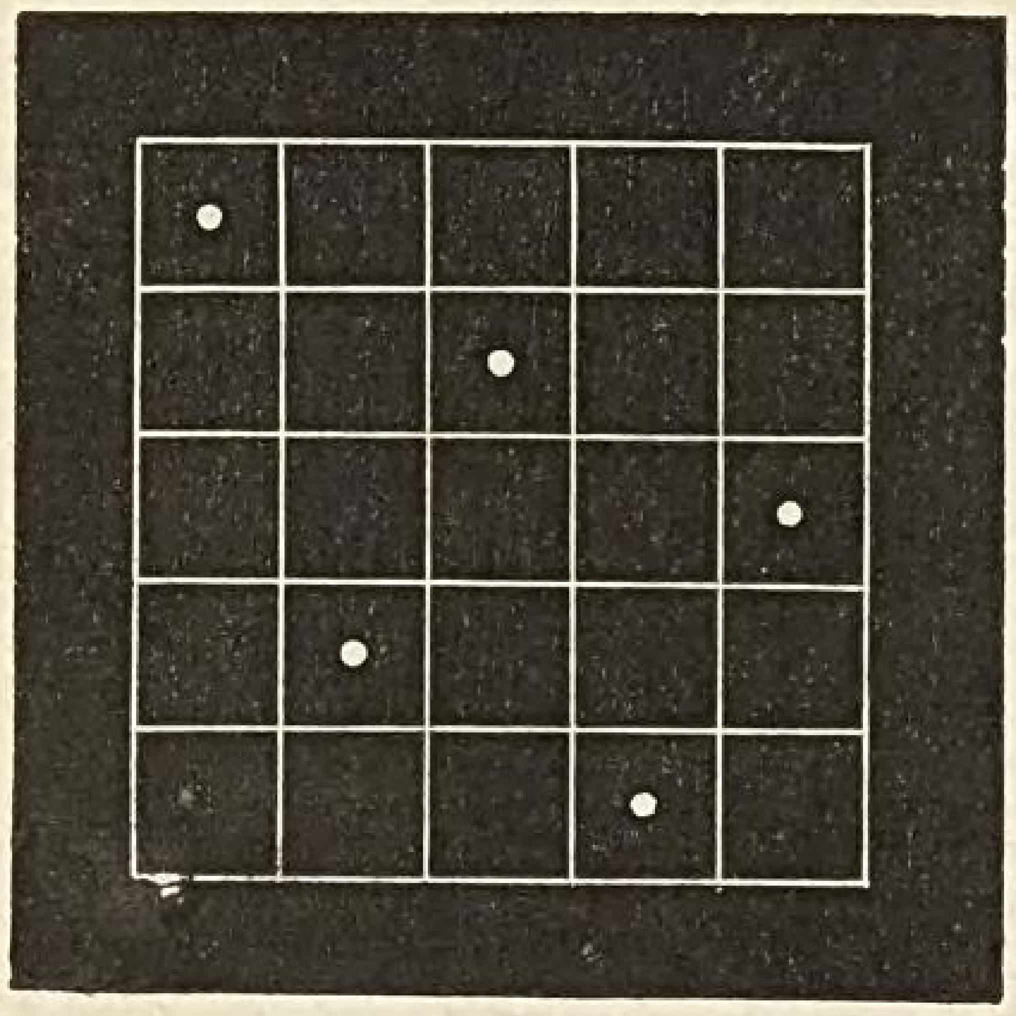
Die Zahl der Lösungen für die gleiche Aufgabe bei den Bauern des Schachspiels ist bedeutend größer; man findet, daß es sehr leicht ist, acht Bauern so aufzustellen, daß sie sich gegenseitig nicht schlagen können, und es können bis zu vierzehn Bauern auf dem Schachbrett von acht Feldern an jeder Seite so angeordnet werden. Setzt man z. B. acht Bauern in die erste Reihe und sechs in die letzte, so daß die letzten zwei Felder frei bleiben, so wird diese Lösung der Bedingung gerecht. Es ist daher für die

[1]) Clément, der Mörder Heinrich's III. von Frankreich (31. Juli 1589).

[2]) Bezieht sich auf die Revolution von 1789.

Lösung unserer Aufgabe zweckmäßiger, jene obigen Zahlen für die Lösung der Aufgabe mit den Türmen dahin zu untersuchen, ob sie und welche von ihnen auch der zweiten Bedingung entsprechen, welche sich auf den Gang längs der Diagonalenrichtung bezieht. Unter arithmetischem Gesichtspunkte aufgefaßt kommt nun die Lösung der Aufgabe für die acht Königinnen darauf zurück, unter 40320 Permutationen diejenigen ausfindig zu machen, bei denen der absolute Unterschied von irgend zwei Zahlen gleich ist dem Unterschied der von ihnen eingenommenen Platznummern. Denn jede Folge von acht Zahlen, bei denen diese Bedingung erfüllt ist, ist eine Lösung für die acht Bauern, wovon man sich leicht auf dem Schachbrett überzeugen kann. Unsere Aufgabe ist jetzt auf folgende arithmetische zurückgeführt: Es sollen alle Zahlen, gebildet aus den ersten acht Ziffern, hingeschrieben werden, bei denen der absolute Unterschied je zweier verschieden ist von ihrem Stellenunterschiede. Diese Methode hat Lionnet in den „Nouvelles Annales de Mathématiques“ angewendet.

Fig. 174.



1 4 2 5 3

a_1 f_4 g_6 c_5 b_8

Fig. 175.

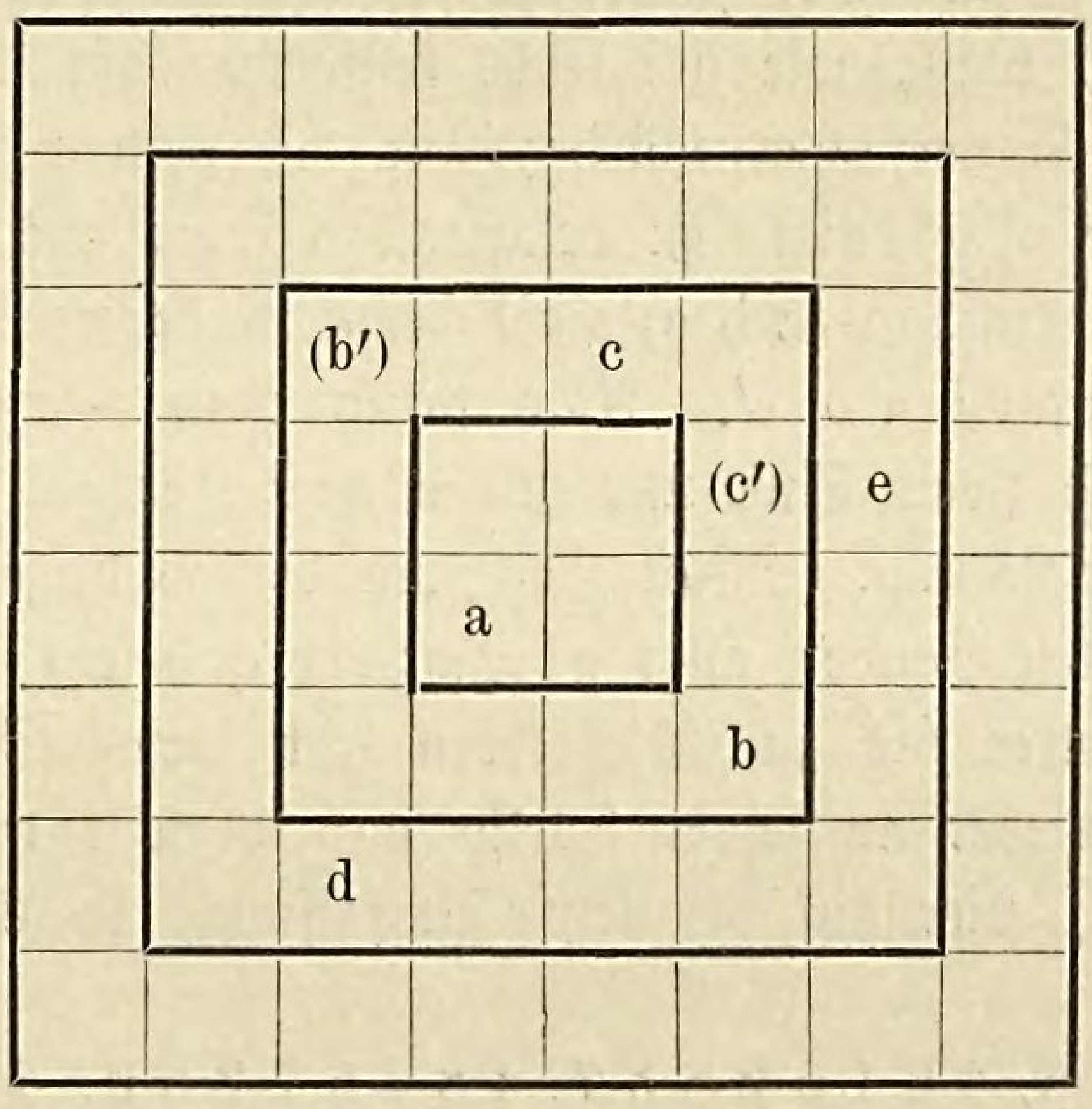
a_1	f_2	g_3	h_4	i_5
b_2	a_3	f_4	g_5	h_6
c_3	b_4	a_5	f_6	g_7
d_4	c_5	b_6	a_7	f_8
e_5	d_6	c_7	b_8	a_9

Die Methode von S. Günther ist etwas anders und wir wollen sie für fünf Königinnen an folgendem Schema erläutern: Die Elemente mit demselben Buchstaben entsprechen der Diagonalrichtung, diejenigen mit derselben Zahl der anderen. Schreiben wir nun zunächst in irgend einer Reihenfolge alle Ausdrücke hin, welche aus fünf Elementen gebildet sind, aber so, daß diese keine zwei Elemente aus derselben Zeile und Reihe enthalten, z. B. a_1 f_4 g_6 c_5 b_8 (siehe Fig. 174), so haben wir die sämmtlichen 120 Lösungen für das Problem der fünf Türme. Unterdrücken wir unter diesen diejenigen, bei denen zwei Elemente

(Fig. 175) denselben Buchstaben oder Index haben, so bleiben die gewünschten Lösungen für das Problem der fünf Königinnen übrig. Unser Beispiel a_1 f_4 g_6 c_5 b_8 ist eine solche Lösung. Wenn man sich hierbei der Ergebnisse der Determinantentheorie bedient, braucht man nicht alle 120 Lösungen hinzuschreiben. Aber trotz dieser möglichen Vereinfachung scheint das Problem fast unlöslich nach dieser Methode, wenn man ein Schachbrett von mehr als acht Seitenfeldern zu Grunde legen will.

Die Methode von De La Noé besteht in der Zerlegung des Schachbrettes in konzentrische Quadrate (Fig. 176). Die erste Grenz-

Fig. 176.



linie schließt 4 Quadrate ein, die zweite 12, die dritte 20, die vierte 28. Für jedes Schachbrett von gerader Seitenzahl gestaltet sich die Zerlegung auf diese Weise, so daß jede folgende Zahl die vorhergehende um 8 übertrifft. Für ein ungerades Schachbrett schließt man das innerste Quadrat in die erste Grenzlinie; dann enthalten die folgenden 8, 16, 24, 32 Quadrate. Gehen wir nun von der ersten Grenzlinie aus und setzen auf das eine Quadrat derselben eine Königin (beim gewöhnlichen Schachbrett), so kann dieselbe mit einem einzigen Zuge im Ganzen 28 verschiedene Felder besetzen, von einem Felde der zweiten Grenzlinie aus dagegen 26, von der dritten aus 24 und von der vierten aus 22. Hat man nun beispielsweise eine Königin auf a gesetzt, so sucht

man auf alle möglichen Arten die größte Anzahl von Königinnen in die zweite Grenzlinie zu bringen, ohne daß sich die aufgestellten Königinnen gegenseitig nehmen können. Man sieht, daß zwei Königinnen entweder in b und c oder in b′ und c′ aufgestellt werden können, wobei diese beiden Lösungen symmetrische Spiegelbilder zur Diagonale sind. Für ein Schachbrett von sechszehn Feldern würden nur drei Königinnen (a b c) die Aufstellung 0 2 4 1, 1 4 2 0, 4 2 0 3 oder 3 0 2 4 haben. Man sieht leicht ein, daß man nicht nötig hat, die Königin a auf die übrigen drei Felder der ersten Grenzlinie zu setzen, da man dieselben Lösungen erhalten würde. Setzt man nun zwei Königinnen d und e in passender Weise auf die dritte Grenzlinie, so bleiben noch drei Königinnen für die letzte, was, wie sich leicht feststellen läßt, unmöglich ist. Wenn man nun versuchen würde, auf der dritten Grenzlinie nur eine Königin oder keine zu belassen, so führt auch das zu keiner Lösung. Der Anfang (a b c) giebt demnach keine Lösung, ebenso wenig der Anfang a b′ c′. Auch wenn man a an seiner Stelle beläßt und die zweite Linie nur mit einer Königin besetzt, gelangt man zu keiner Lösung. Man zieht nun den wichtigen Schluß, daß die beiden ersten Banden nicht gleichzeitig besetzt sein dürfen (für alle Schachbretter bis zu 64 Feldern gilt dieses Gesetz). Beläßt man nun a wieder an seiner Stelle und verteilt drei Königinnen auf die dritte, vier auf die letzte Umfassung, so findet man die Lösungen:

3 5 8 4 1 7 2 6, 4 6 1 5 2 8 3 7, 4 8 1 5 7 2 6 3, 4 2 7 5 1 8 6 3.

Man bezeichnet diese Lösungen als Typus **1 0 3 4** gemäß der Zahl der in jeder Grenzlinie aufgestellten Königinnen, denn in der ersten Abteilung befindet sich eine Königin, in der zweiten keine, in der dritten drei, in der vierten vier Königinnen. Nimmt man a fort und verteilt zunächst drei, dann zwei, endlich eine Königin auf die zweite Grenzlinie, so erhält man:

7 2 6 3 1 4 8 5	für den Typus 0 3 1 4
5 7 2 6 3 1 4 8, 1 6 8 3 7 4 2 5	„ „ „ 0 2 3 3
6 1 5 2 8 3 7 4, 5 7 2 6 3 1 8 4, 5 1 4 6 8 2 7 3	„ 0 2 2 4
5 8 4 1 7 2 6 3	„ „ „ 0 1 3 4

Schließlich erhält man noch für den Typus 0 0 4 4 die Lösung 3 5 2 8 1 7 4 6, welche halb regelmäßig ist, während die übrigen

Fig. 177. Tabelle der 92 Lösungen der Aufgabe von den acht Königinnen.

1	1 5 8 6 3 7 2 4	24	3 6 8 1 5 7 2 4	47	5 1 4 6 8 2 7 3	70	6 3 1 8 5 2 4 7
2	1 6 8 3 7 4 2 5	25	3 6 8 2 4 1 7 5	48	5 1 8 4 2 7 3 6	71	6 3 5 7 1 4 2 8
3	1 7 4 6 8 2 5 3	26	3 7 2 8 5 1 4 6	49	5 1 8 6 3 7 2 4	72	6 3 5 8 1 4 2 7
4	1 7 5 8 2 4 6 3	27	3 7 2 8 6 4 1 5	50	5 2 4 6 8 3 1 7	73	6 3 7 2 4 8 1 5
5	2 4 6 8 3 1 7 5	28	3 8 4 7 1 6 2 5	51	5 2 4 7 3 8 6 1	74	6 3 7 2 8 5 1 4
6	2 5 7 1 3 8 6 4	29	4 1 5 8 2 7 3 6	52	5 2 6 1 7 4 8 3	75	6 3 7 4 1 8 2 5
7	2 5 7 4 1 8 6 3	30	4 1 5 8 6 3 7 2	53	5 2 8 1 4 7 3 6	76	6 4 1 5 8 2 7 3
8	2 6 1 7 4 8 3 5	31	4 2 5 8 6 1 3 7	54	5 3 1 6 8 2 4 7	77	6 4 2 8 5 7 1 3
9	2 6 8 3 1 4 7 5	32	4 2 7 3 6 8 1 5	55	5 3 1 7 2 8 6 4	78	6 4 7 1 3 5 2 8
10	2 7 3 6 8 5 1 4	33	4 2 7 3 6 8 5 1	56	5 3 8 4 7 1 6 2	79	6 4 7 1 8 2 5 3
11	2 7 5 8 1 4 6 3	34	4 2 7 5 1 8 6 3	57	5 7 1 3 8 6 4 2	80	6 8 2 4 1 7 5 3
12	2 8 6 1 3 5 7 4	35	4 2 8 5 7 1 3 6	58	5 7 1 4 2 8 6 3	81	7 1 3 8 6 4 2 5
13	3 1 7 5 8 2 4 6	36	4 2 8 6 1 3 5 7	59	5 7 2 4 8 1 3 6	82	7 2 4 1 8 5 3 6
14	3 5 2 8 1 7 4 6	37	4 6 1 5 2 8 3 7	60	5 7 2 6 3 1 4 8	83	7 2 6 3 1 4 8 5
15	3 5 2 8 6 4 7 1	38	4 6 8 2 7 1 3 5	61	5 7 2 6 3 1 8 4	84	7 3 1 6 8 5 2 4
16	3 5 7 1 4 2 8 6	39	4 6 8 3 1 7 2 5	62	5 7 4 1 3 8 6 2	85	7 3 8 2 5 1 6 4
17	3 5 8 4 1 7 2 6	40	4 7 1 8 5 2 6 3	63	5 8 4 1 3 6 2 7	86	7 4 2 5 8 1 3 6
18	3 6 2 5 8 1 7 4	41	4 7 3 8 2 5 1 6	64	5 8 4 1 7 2 6 3	87	7 4 2 8 6 1 3 5
19	3 6 2 7 1 4 8 5	42	4 7 5 2 6 1 3 8	65	6 1 5 2 8 3 7 4	88	7 5 3 1 6 8 2 4
20	3 6 2 7 5 1 8 4	43	4 7 5 3 1 6 8 2	66	6 2 7 1 3 5 8 4	89	8 2 4 1 7 5 3 6
21	3 6 4 1 8 5 7 2	44	4 8 1 3 6 2 7 5	67	6 2 7 1 4 8 5 3	90	8 2 5 3 1 7 4 6
22	3 6 4 2 8 5 7 1	45	4 8 1 5 7 2 6 2	68	6 3 1 9 5 8 2 4	91	8 3 1 6 2 5 7 4
23	3 6 8 1 4 7 5 2	46	4 8 5 3 1 7 2 6	69	6 3 1 8 4 2 7 5	92	8 4 1 3 6 2 7 5

unregelmäßig sind. Wir haben damit alle 92 = 8 × 11 + 4 × 1 Lösungen gefunden. Der Typus 1 0 3 4 giebt zweiunddreißig Lösungen, 0 3 1 4 acht, 0 2 3 3 sechszehn, 0 2 2 4 vierundzwanzig, 0 1 3 4 acht und 0 1 4 3 vier Lösungen.

Die vorstehende Tabelle (Fig. 177) enthält sämmtliche 92 Lösungen. Sie erfüllen sämmtlich die Bedingung, daß jede die ersten acht Ziffern enthält und daß nie die Differenz zweier in einer von ihnen enthaltenen Ziffern gleich ist der Differenz ihrer Stellen. Die acht Reihen haben die gleiche Summe 414 = 18 × 23 und in jeder Reihe kommt jede Ziffer gleich oft vor. Vier Lösungen enden mit 1 oder 8, acht mit 2 oder 7, sechszehn mit 3 oder 6, achtzehn mit 4 oder 5.

Die folgende Tabelle (Fig. 178), welche ebenso wie die vorhergehende von Parmentier in Constantine zuerst gegeben ist, enthält die Lösungen für die Schachbretter mit vier, fünf, sechs und sieben Feldern an jeder Seite.

Fig. 178. Tabelle der einfachen Lösungen der Aufgabe von den vier, fünf, sechs, sieben Königinnen.

n	N	Summe	Typus	Form
4	16	2	0 4	2 4 1 3
5	25	10	1 0 4	2 5 3 1 4
			0 2 3	2 3 1 4 2
6	36	4	0 2 4	2 4 6 1 3 5
7	49	40	0 1 2 4	6 3 5 7 1 4 2
			1 0 2 4	5 7 2 4 6 1 3
			1 0 2 4	3 7 2 4 6 1 5
			0 2 1 4	4 6 1 3 5 7 2
			0 1 3 3	1 3 5 7 2 4 6
			0 1 3 3	3 5 7 2 4 6 1

Die Tabelle mit 92 Lösungen ist in numerischer Folge geordnet. Gauß hat gezeigt, wie man sie leicht aufstellen kann. Man nimmt ein Schachbrett und setzt von links nach rechts fortschreitend in jede Reihe eine Königin und zwar jedesmal in die tiefste mögliche Stelle. Bei jeder folgenden ist natürlich die Stellung aller vorhergehenden gemäß den Bedingungen der Aufgabe zu beachten. Wenn nun der

Augenblick kommt, wo man keine Königin in einer Reihe aufstellen kann, *so erhöht man den Platz der Königin in der vorhergehenden Reihe solange, bis man fortfahren kann.* Man bildet dann für jede gefundene Lösung die konjugirten Lösungen und die Umkehrungen gemäß den obigen Erklärungen.

Gauß hat gezeigt, wie man durch die Theorie der Kongruenzen eine Menge Lösungen für das allgemeine Problem bilden kann. Wir sagen eine Zahl a ist kongruent der Zahl b für den Modul p, wenn sich a und b um ein Vielfaches von p unterscheiden und schreiben diese Beziehung $a = b \ (\mathrm{mod}\ p)$ und es ist $a - b = np$. Wir können hier jedoch auf diese zahlentheoretische Lösung nicht weiter eingehen.

16.

Das Spiel der Bootsfahrten.

Das Spiel der „Ueberfahrten mit einem Boote“ läßt sich leicht mit einem Spiel Karten oder weißen und roten numerirten Steinen veranschaulichen. Ein französischer Mathematiker Caspar Bachet de Méziriac im Anfange des siebzehnten Jahrhunderts hat zuerst eine Lösung des Spiels gegeben in einem Werke (Lyon 1613): „Receuil de Problèmes plaisants et délectables qui se font par des Nombres“. Er giebt z. B. folgende Aufgaben: „Eine Kompagnie Soldaten kommt an einen Fluß; aber die Brücke ist zerbrochen, der Fluß tief. Der Hauptmann bemerkt am Ufer zwei Kinder, welche in einem kleinen Boote spielen; dieses ist jedoch so klein, daß es keine zwei Soldaten trägt. Wie fängt der Hauptmann es an, um seine Soldaten an das andere Ufer zu bringen? Lösung: Die beiden Knaben rudern an das andere Ufer; dort bleibt der eine, der andere kehrt zurück; ein Soldat besteigt das Boot allein und fährt hinüber, der Knabe am andern Ufer bringt das Boot zurück und so fort, wieder von vorn. Die Ueberfahrt jedes Soldaten erfordert demnach zwei Hin- und zwei Rückfahrten.“ — In Deutschland ist die folgende Aufgabe bekannt: „Am Ufer eines Flusses befinden sich ein Wolf, eine Ziege und ein Kohlkopf. Das zur Verfügung stehende Boot ist so klein, daß nur der Fährmann mit je einem dieser drei Gegenstände es besteigen kann. Wie bringt er sie hinüber, so daß weder der Wolf die Ziege, noch die Ziege den Kohlkopf etwa in Abwesenheit des Fährmanns fressen kann.“ Lösung: Der Fährmann bringt die Ziege hinüber; dann holt er den Wolf, nimmt aber die Ziege mit sich zurück, sobald er den Wolf absetzt, und holt den Kohlkopf, welcher beim Wolfe bleibt.

Schließlich holt er die Ziege nach. Es muß eben vermieden werden, daß Wolf und Ziege oder Ziege und Kohlkopf zusammen sind und dazu sind vier Hin- und drei Rückfahrten erforderlich. — Eine dritte Aufgabe, die einer Verallgemeinerung fähig ist, ist folgende: „Drei eifersüchtige Gatten wollen mit ihren Frauen ohne Fährmann in einem Boote übersetzen, welches nur zwei Personen faßt. Wie fangen sie das an, ohne daß eine der Frauen in Gesellschaft eines oder der beiden anderen Männer bleibt, wenn nicht ihr Gatte dabei ist." Die Lösung dieses Problems ist in folgendem alten doppelten Distichon enthalten:

It duplex mulier, redit una, vehitque manentem
Itque una, utuntur tunc duo puppe viri.
Par vadit, redeunt bini; mulierque sororem
Advehit; ad propriam sive maritus abit.

Folgendes Schema wird die sechs erforderlichen Ueberfahrten verständlich machen, wobei die großen Buchstaben die Männer, die kleinen die Frauen bedeuten.

Erstes Ufer		Zweites Ufer
1. C B A c — —	b und a (zwei Frauen) fahren	— — — — b a
2. C A B — — —	b holt c	— — — c b a
3. C — — c — —	c fährt zurück, A und B fahren	— B A — b a
4. — — — c b —	B und b fahren zurück, B holt C	C B A — — a
5. — — — c — —	a fährt zurück und holt b	C B A — b a
6. — — — — — —	C holt seine Frau c	C B A c b a

In sechs Ueberfahrten ist die Aufgabe gelöst.

Infolge der gestellten Bedingung sind folgende drei Fälle bei jeder Ueberfahrt möglich: entweder fahren zwei Männer oder zwei Frauen oder ein Ehepaar. Bei der ersten Ueberfahrt dürfen aber nicht zwei Männer fahren, da ihre Frauen sonst in der Gesellschaft des dritten bleiben würden. Fahren nun anfangs zwei

Frauen, so kehrt eine Frau zurück; fährt aber zuerst ein Ehepaar, so muß der Mann zurückfahren, da andernfalls seine Frau ohne Gatten nachher auf der andern Seite würde bleiben müssen. Es fahren also zuerst zwei Frauen hinüber. Bei der zweiten Ueberfahrt dürfen wiederum zwei Männer nicht fahren, da sonst die Bedingung nicht erfüllt wäre, auch ein Paar kann nicht fahren, da der Mann sich am andern Ufer mit zwei Frauen zusammenfinden würde. Es müssen zwei Frauen fahren, worauf dann alle Frauen drüben sind. Beim Beginn der dritten Ueberfahrt sind noch die drei Männer und eine Frau zu befördern. Das Ehepaar darf nicht hinüber, da sich der Mann am andern Ufer mit den drei Frauen zusammen befinden würde. Das Ehepaar muß also zurückbleiben und die andern beiden Männer rudern zu ihren Frauen. Wer rudert aber nun das Boot zurück? Ein Mann darf seine Frau nicht verlassen, da sie in Gesellschaft der anderen Männer bleiben würde. Eine Frau oder auch zwei dürfen auch nicht hinüber, da dort der dritte fremde Ehemann sich befindet. Also muß ein Ehepaar hinüber. Bei der vierten Ueberfahrt sind zwei Ehepaare da. Ein Ehepaar ist gekommen: es würde also zu nichts führen, wenn ein Paar das Boot wieder bestiege. Zwei Frauen dürfen auch nicht hinüber, da sie dort mit dem dritten Gatten zusammentreffen würden. Es besteigen daher zwei Männer das Boot. Es würde die Aufgabe nicht weiter fördern, wenn sie wieder zurückführen, ein Mann allein nützt auch nichts, weil drüben zwei Frauen sind. Es muß daher nur eine Frau sein, welche die zweite Frau holt, worauf dann beim sechsten Male entweder der Ehemann oder eine Frau die letzte Frau holen muß.

Es ist also diese Lösung in sechs Ueberfahrten die einzig mögliche. Der berühmte Mathematiker Tartaglia aus Brescia, welcher vor Pascal in der ersten Hälfte des sechzehnten Jahrhunderts die Theorie des Zahlendreiecks und vor Cardanns die Lösung der Gleichung dritten Grades gegeben hat, hatte sich in seinem „Arithmetischen Traktat" die Aufgabe gestellt, dasselbe Problem für vier Paare zu lösen; aber er hatte sich geirrt. Bachet hat später gezeigt, daß dieser Fall unmöglich ist. Man kann anfangs so verfahren, wie oben. Setzen wir den Fall, daß fünf Personen an das andere Ufer gefahren sind. Wir wollen beweisen, und zwar durch die

Konsequenzen dieser Annahme, daß das unmöglich ist. Folgende Möglichkeiten bieten sich dar:

4 Frauen	3 Frauen	2 Frauen	1 Frau
1 Mann	2 Männer	3 Männer	4 Männer.

Die beiden ersten Fälle sind durch die Bedingung ausgeschlossen; der dritte Fall ist unmöglich, da am andern Ufer eine Frau ohne ihren Gatten sein würde in Gegenwart eines andern Ehemanns. Was nun den letzten Fall anbetrifft, so könnte er doch nur so eingetreten sein, daß mit der letzten Fahrt zwei Männer oder ein Paar hinübergefahren sind. Wären aber zwei Männer gekommen, so würden am andern Ufer vorher zwei Männer und drei Frauen gewesen sein, was ja nach dem Vorigen unstatthaft ist. Wäre ein Ehepaar zuletzt übergesetzt, so hätten sich drüben ein Mann und drei Frauen befunden, was ja auch unmöglich war. Demnach ist das ganze Problem unmöglich, da niemals unter der gestellten Bedingung fünf Personen an das andere Ufer gebracht werden können.

Sobald man jedoch annimmt, daß das Boot drei Personen faßt, ist die Lösung möglich, wie folgendes Schema zeigt:

Erstes Ufer		Zweites Ufer
1. D C B A d — — —	Drei Frauen fahren hinüber	— — — — — c b a
2. D C B A — — — —	Eine Frau holt die vierte	— — — — d c b a
3. D — — — d — — —	d fährt zurück, C, B, A fahren	— C B A — c b a
4. — — — — d — — —	Ein Paar holt den vierten Mann	D C B A — c b a
5. — — — — — — — —	Der vierte Ehemann holt seine Frau	D C B A d c b a

Bereits in fünf Hin- und Herfahrten ist das Problem gelöst.

Die Lösbarkeit der Aufgabe bei drei Paaren mit einem zweisitzigen Boote, bei vier Paaren mit einem dreisitzigen führt uns auf das allgemeine Problem, wie n Paare in einem Boote unter den gestellten Bedingungen zu befördern sind, wenn das Boot (n — 1) Personen faßt. Die Ueberfahrt ist stets in vier Fahrten zu bewerkstelligen, also in einer bzw. zwei Fahrten weniger als vorhin. Jene

Mehrfahrten waren dadurch erforderlich, daß die letzten Personen lediglich wegen der Kleinheit des Bootes nicht auf einmal hinüber geschafft werden konnten. Folgendes Schema giebt die Lösung der allgemeinen Aufgabe.

Die Buchstaben M L . . . B A bezeichnen eine beliebige Anzahl Männer, m l . . . b a ebenso n Frauen.

	Erstes Ufer		Zweites Ufer
1.	M L — B A m (l — b a)	l — b a fahren hinüber	— — — — — l — b a
2.	M L — B A — — — —	Die letzte Frau wird geholt	— — — — m l — b a
3.	M — — — m — — —	m fährt zurück, L — B A fahren hinüber	— L — B A — l — b a
4.	— — — — — — — —	Ein Ehepaar holt das letzte	M L — B A m l — b a

Die letzte Ueberfahrt zeigt, daß thatsächlich nicht mehr als vier Fahrten erforderlich sind, sobald das Boot mindestens vier Personen faßt, sobald demnach fünf Paare vorhanden sind. Für vier Paare ist eine Fahrt mehr, für drei Paare sind zwei Fahrten mehr nötig.

Nun läßt das allgemeine Problem aber noch eine andere Fragestellung zu. Sind z. B. neun Paare vorhanden, so könnte man sie auffassen als drei Gruppen zu je drei Paaren. Dann ist die Ueberfahrt in sechs Fahrten möglich, sobald das Boot sechs Personen faßt, da ja drei Paare in sechs Fahrten befördert werden konnten, wenn das Boot zwei Personen aufnehmen konnte. Es ist ferner leicht einzusehen, daß, sobald ein Boot vier Personen faßt, n Paare in (n — 1) Fahrten unter den gestellten Bedingungen übersetzen können, da ja zwei Paare jedesmal hinüberfahren können, von denen dann das eine zurückkehrt, um das nächste zu holen. Nimmt das Boot nur drei Personen auf, so können sechs Paare nicht befördert werden. Dies wird ebenso bewiesen, wie vorhin bewiesen wurde, daß vier Paare nicht in einem zweisitzigen Boote befördert werden können. Es bleibt demnach nur noch übrig, zu zeigen, wie fünf Paare in einem dreisitzigen Boote würden befördert werden können:

	Erstes Ufer		Zweites Ufer
1.	E D C B A e d — — —	c b a rudern hinüber	— — — — — — — c b a
2.	E D C B A e — — — —	Eine Frau holt die vierte	— — — — — — d c b a
3.	E D — — — e d — — —	d fährt zurück; C B A fahren	— — C B A — — c b a
4.	— — — — — e d c — —	C und c kehren zurück; C D E fahren	E D C B A — — — b a
5.	— — — — — e — — — —	Eine Frau kommt zurück und holt d u. c	E D C B A — d c b a
6.	— — — — — — — — — —	E holt seine Frau e	E D C B A e d c b a

Kommt es also darauf an, die geringste Anzahl Personen kennen zu lernen, welche das Boot fassen muß, um die Ueberfahrt bewerkstelligen zu können, so giebt folgende Tabelle Aufschluß:

Zahl der Paare	Zahl der Personen, die das Boot faßt	Zahl der Ueberfahrten
2	2	3
3	2	6
4	3	5
5	3	6
$n > 5$	4	$n - 1$
n	$n - 1$	4

Ohne näher auf die Lösung einzugehen, möge noch zum Schluß bemerkt werden, daß eine beliebige Anzahl Paare wohl auch an das andere Ufer in einem zweisitzigen Boote befördert werden kann, sobald sich nämlich auf dem Flusse eine Insel befindet, welche als Zwischenstation benutzt werden kann. Es sind dann für n Paare $4(n - 1)$ Ueberfahrten erforderlich, für vier Paare also beispielsweise zwölf Fahrten. Wer sich für diese Erweiterung interessirt, wird leicht aus dem vorigen Verfahren die Anhaltspunkte für fernere Untersuchungen schöpfen können.

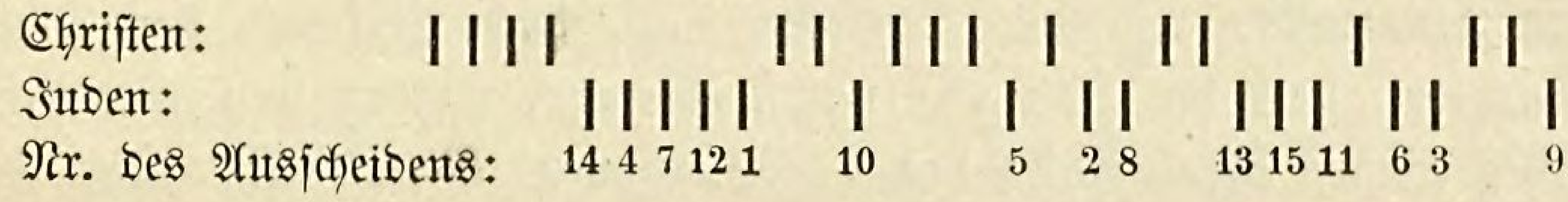
17.

Abzählprobleme.

Wenn unsere Jugend „Räuber-" oder ähnliche Spiele beginnen will, stellen sich wohl die Mitspielenden im Kreise auf und es beginnt das „Abzählen". Hierbei wird von demjenigen, der in der Mitte steht und die Abzählung vornimmt, ein Sprüchlein hergesagt und bei jedem Worte einer der Mitspielenden der Reihe nach „betippt". Z. B.: „Ene mene mink mank pink pank use buse packe dich, eier, beier, weg." Derjenige, auf den das letzte Wort trifft, scheidet für den vorher abgemachten Zweck aus: hierbei also der Dreizehnte. Nach Austritt des Betreffenden beginnt die weitere Abzählung bei dem Folgenden. Waren beispielsweise zehn Knaben vorhanden, so mußte zuerst der dritte ausscheiden. Nun sind noch neun da und weil die Zählung beim früheren vierten beginnt, so scheidet demnächst der siebente aus, darauf beginnt die Zählung beim achten und endet beim zweiten und so fort. Das Problem kann selbstverständlich empirisch leicht gelöst werden und man kann ermitteln, welche Nummern nacheinander ausscheiden und wer als Letzter übrig bleibt. Professor Schubert hat zuerst vor einigen Jahren in der „Naturwissenschaftlichen Wochenschrift" (1894, Nr. 14, S. 167) eine allgemeine Regel für solche Abzählprobleme gegeben. Wir werden dieselbe nachher kennen lernen, wollen aber zunächst daran erinnern, in wie mannigfaltigen Scherzaufgaben dieses Problem als Kern steckt. Der Student kennt sie als Aufgabe, bei welcher der Wirt oder Philister hinters Licht geführt wird. Man setzt sich zu Tisch mit der Abmachung, daß nach Beendigung der Mahlzeit derjenige alles bezahlen soll, welcher bei der Abzählung zuletzt noch am Tische sitzen bleibt. Natürlich richtet man den Beginn der Zählung so ein, daß der Wirt übrig bleibt. In Montags „Wunder der Arithmetik" steht die Aufgabe unter der Ueberschrift „Der von

Studenten angeführte Wirt". Siebzehn Studenten halten das Mittagsmahl, der Wirt ist der Achtzehnte. Die Reihenfolge des Abzählens wird so begonnen, daß der Wirt **Neunter** ist; immer der Siebente wird frei und verläßt das Lokal. Der Antisemit kennt ihre Lösung unter der Devise: „Gott schuf den Mann in Amalek, der Israel bezwang" und erzählt folgende Geschichte: „Fünfzehn Christen und ebensoviele Juden befinden sich auf einem Schiffe; ein Sturm erhebt sich und der Kapitän verlangt, da das Fahrzeug überladen ist, daß die Hälfte der Passagiere dasselbe verläßt. Einer der Christen schlägt eine Abzählung vor und weiß bei derselben die Reihenfolge so zu gestalten, daß thatsächlich nur Juden ausballotirt werden. Werden nämlich die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 durch die Vokale a, e, i, o, u angedeutet, so soll der obige Merkspruch andeuten, daß erst vier Christen, dann fünf Juden, darauf zwei Christen und ein Jude, dann drei Christen und ein Jude, ein Christ und zwei Juden, zwei Christen, drei Juden, ein Christ,

Fig. 179.



zwei Juden, zwei Christen, ein Jude aufeinanderfolgen müssen, damit jenes Resultat erreicht wird, wenn jedesmal der **Neunte** ausscheiden soll. In dem beistehenden Schema (Fig. 179) ist diese Anordnung angedeutet und durch untergeschriebene Zahlen die Reihenfolge des Ausscheidens bezeichnet. Bachet de Méziriac in seinem „Problèmes plaisants" (1613) giebt folgendes mnemotechnische Hilfsmittel: „Mort, tu ne falliras pas, En me livrant le trépas", während Ozanam den lateinischen Hexameter angiebt: „Populeam virgam mater regina ferebat." Die Engländer haben nach Schubert den Vers:

„From number's aid and art
Never will fame depart."

Fast immer sind es aber merkwürdiger Weise dreißig Personen,[1])

[1]) In Montags „Wunder der Arithmetik" ist es ein Fabrikant mit dreißig Arbeitern, von denen er die Hälfte, durch ungünstige Zeitverhältnisse gezwungen, entlassen muß. Er richtet die Abzählung so ein, daß diejenigen Fünfzehn entlassen werden, die noch **unverheiratet** sind.

von jeder Partei 15 und bis 9 wird gezählt. Bereits bei Tartaglia findet sich diese Aufgabe in der Mitte des sechszehnten Jahrhunderts und es ist kein Wunder, wenn damals, wo die Türkengefahr in Permanenz war, Türken und Christen in der Aufgabe einander gegenübergestellt wurden.

Um zunächst einmal an einem einfachen Beispiele zu zeigen, wie man mathematisch der Sache beikommen kann, nehmen wir an, immer der Zweite solle ausscheiden und wollen uns fragen, wer dann zuletzt ausscheidet. Bei zwei Personen offenbar der Erste und ebenso bei jeder Potenz von Zwei, wie man sich leicht klar machen kann. Derjenige, bei welchem die Zählung beginnt, scheidet zuletzt aus, wenn 2, 4, 8, 16, 32, 64 u. s. f. Personen vorhanden sind. Es ist ferner leicht einzusehen, daß die Platznummer des zuletzt Ausscheidenden sich jedesmal um Zwei erhöht, wenn die Personenzahl um eine Einheit zunimmt. Welche Platznummer wird also wohl bei dreißig Personen zuletzt ausscheiden? Bei 16 Personen die Nummer 1, folglich, da der Ueberschuß 14 ist, der Neunundzwanzigste, also der Vorletzte; bei 150 Personen der Fünfundvierzigste, da 128 die nächst niedere Potenz von Zwei ist. Wir können also, falls der Abzählexponent $d = 2$ ist, durch die Potenzen von 2 leicht den zuletzt Ausscheideaden x für eine beliebige Grundzahl n bestimmen. Man bildet dxn, subtrahirt davon die nächst höhere Potenz von Zwei, die kleiner ist als dxn und zählt 1 hinzu. Die erhaltene Zahl giebt den ursprünglichen Platz des zuletzt Ausscheidenden an. Für $n = 100$ ist $dn = 200$, die nächst niedere Potenz 128, die Differenz 72,[1]) also der Dreiundsiebzigste der Letzte.

Verfolgt man nun die Angelegenheit weiter und ermittelt, welchen Platz der Vorletzte haben würde, so lautet die zu beachtende Reihe, der das nächst niedere Glied als Subtrahend zu entnehmen ist, wenn wieder der Zweite jedesmal ausscheidet, wie folgt:

3, 6, 12, 24, 48, 96, 192 . . . beim Viertletzten
5, 10, 20, 40, 80, 160, 320 . . . . .

Die Reihe beginnt beim Vorletzten mit $2 + 1$, beim Drittletzten mit $3 + 1$ u. s. f. Beim Letzten begann sie mit $1 + 1$.

---

[1]) Bei dieser Art der Berechnung braucht die Differenz nicht mehr mit Zwei multiplizirt zu werden, da Minuend und Subtrahend doppelt so groß genommen sind.

Fragt man, wer als Zehnter ausscheidet, so würde es sich also bei 100 Personen um den Neunzigsten von hinten handeln; man beginnt demnach mit $2 \times 90 = 180$. Da die nächste Zahl der Reihe, 360, bereits größer ist als 200, so ist $200 - 180 + 1 = 21$ die Stelle desjenigen, der als Zehnter ausscheidet. Die zu Grunde gelegten Reihen haben den Exponenten Zwei, d. h. jedes folgende Glied ist das Doppelte der vorhergehenden. Schubert hat gezeigt, daß, falls die Abzählzahl nicht 2, sondern 3 ist, der Exponent $\frac{3}{2}$ und allgemein für die Zahl d gleich $\frac{d}{d-1}$ ist. Dieser Ausdruck paßt auch für $d = 2$, da ja dann $\frac{d}{d-1} = \frac{2}{1} = 2$ ist.

Nehmen wir einmal an, der Dritte solle immer ausscheiden, so giebt es dafür wieder ein historisches Beispiel. Nach der Zerstörung Jerusalems war nämlich der bekannte jüdische Schriftsteller Josephus mit vierzig anderen Juden in einen Keller geflüchtet. Alle, außer Josephus und seinem Freunde, erklärten, lieber sterben zu wollen, als sich den Siegern in die Hände zu geben. Da jene Beiden sich nicht offenbaren mochten, so schlug Josephus, der wohl ein guter Redner gewesen sein muß, vor, daß Alle sich in eine Reihe stellen möchten und beim Abzählen jeder Dritte ausscheiden und sich töten solle. Josephus nahm den einunddreißigsten Platz und wies seinem Freunde den sechzehnten an. Wir werden jetzt nachsehen, ob diese beiden Platznummern beim Abzählen thatsächlich die zuletzt betroffenen waren. Bei Aufstellung der Schubert'schen Reihe ist darauf zu achten, daß keine Brüche vorkommen dürfen, sondern daß, statt eines solchen immer die nächst höhere Zahl zu nehmen und mit ihr weiter zu rechnen ist. Für die Ermittelung des Letzten gilt also folgende Reihe, bei der jedes folgende Glied das Anderthalbfache des vorhergehenden ist (da ja der Exponent $\frac{3}{2}$ ist):

1, 2, 3, 5, 8, 12, 18, 27, 41, 62, 93.

Der Minuend ist $3 \times 41 = 123$, die Differenz ist 30, also ist der Einunddreißigste der letzte. Hier stand Josephus. Für den Vorletzten beginnt die Reihe mit $3 + 1 = 4$, also 4, 6, 9, 14, 21, 32, 48, 72, 108 u. s. f. Der Vorletzte hatte also die Nummer $123 - 108 = 16$. Hier hatte Josephus seinen Freund, welcher

auch gern sein Leben behalten hätte, aufgestellt. Beide ergaben sich den Siegern und blieben am Leben. Wenn wir die Nummer der Reihenfolge des Ausscheidens mit dem Buchstaben e bezeichnen, so ist das Anfangsglied offenbar $d \times (n - e) + 1$ und die Platznummer $x = d \times n - Gr + 1$, wo Gr das größte Glied jener Reihe bezeichnet, welches noch kleiner ist als $d \times n$. Man wird stets zuerst $d \times n$ berechnen, um zu erfahren, wie weit man die betreffende geometrische Reihe zu entwickeln hat.

Wenden wir nun diese Formeln auf unser erstes Beispiel von den 15 Türken und 15 Christen an, so ist $n = 30$, $d = 9$ und e der Reihe nach 1 bis 15. Suchen wir die Platznummer x für den zuletzt Betroffenen ($e = 15$), so ist das Anfangsglied der Reihe 136 $[9(30 - 15) + 1 = 136]$, der Quotient $\frac{9}{8}$,[1]) $d \times n = 270$. Die Reihe lautet:

136	153	173	195	220	248	278 u. s. f.
(17)	(20)	(22)	(25)	(28)	(30)	

Der Letzte hat danach den $(270 - 248 + 1)$sten, den dreiundzwanzigsten Platz, was in der That mit der oben gegebenen Lösung stimmt.

Selbstverständlich kann d auch größer sein als n. Es sei z. B. $n = 8$, $d = 10$, $e = 8$. Dann ist $d \times n = 80$, der Quotient $\frac{10}{9}$, also jedes folgende Glied um $\frac{1}{9}$ größer, als das vorhergehende (aber ganzzahlig). Die Reihe heißt: 1, 2, 3 . . . 9, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 23, 26, 29, 33, 37, 42, 47, 53, 59, 66, 74, 83 . . . Der $(80 - 74 + 1)$ste, also der Siebente scheidet zuletzt aus.

Angenommen, die Schüler einer Klasse mit 28 Schülern wollen dem Lehrer eine Bitte aussprechen, es meldet sich aber Niemand freiwillig dazu, die Bitte vorzutragen. Der Vorschlag, daß derjenige es sein soll, der beim Abzählen zuletzt übrig bleibt, wird angenommen.

---

[1]) $\frac{9}{8}$ ist $= 1 + \frac{1}{8}$; man muß also stets, um die folgende Zahl der Reihe zu finden, zum vorhergehenden Gliede den achten Teil desselben addiren, wobei ein etwaiger Bruch stets aufgerechnet werden muß. Die in Klammern darunter gesetzten Ziffern bedeuten den neuen Summanden.

Welcher ist es, wenn immer der Vierte ausscheidet? Der Quotient ist $\frac{4}{3}$, das Anfangslied 1,[1]) dn = 112. Die Reihe heißt:

1, 2, 3, 4, 6, 8, 11, 15, 20, 27, 36, 48, 54, 86, 105 ....

Demnach hat der achte (112 — 105 + 1) Schüler die Sache vorzutragen.

Wenn man nicht nur, wie in den bisherigen Fällen eine oder wenige Platznummern wissen will, sondern sämmtliche, so ist es nach Schubert vorteilhafter, sich eine Tabelle anzufertigen, aus der für jedes beliebige e der Wert x, also die Platznummer des an e-ter Stelle Betroffenen hervorgeht. Diese Tabelle wird so angefertigt, daß man untereinander die Zahlen n von 1 an bis zu beliebiger Höhe hinschreibt und als Kopf darüber nebeneinander die Werte von e, mit 1 beginnend und bis zu derselben Höhe fortschreitend, wie n, so daß die Form der Tabelle eine quadratische wird. Nun ist, so lange d kleiner als n ist, für e = 1 offenbar x = d; sobald aber d größer als n ist, wird x dem Reste gleich sein, welcher bei der Division d : n bleibt. Für e = 2 ist x um d größer als der vorige Wert für e = 1: doch hat man n unter Umständen so oft abzuziehen, bis die erhaltene Zahl kleiner als n wird. Diese Zahl bezieht sich dann allerdings auf ein um eine Einheit höheres n. Man findet also in der Diagonale der Quadrattabelle und den dazu parallelen Richtungen Zahlen, die aus einander mechanisch ableitbar sind. Jede derartige Tabelle giebt für eine bestimmte Abzählziffer eine in jeder Beziehung vollständige Lösung. Es wird von dem einzelnen Falle abhängen, ob man sich lieber eine Tabelle bildet oder ob man die gesuchten Werte mittelst der oben gegebenen Schubert'schen Formel ermittelt.

[1]) Es ist n = 28, e = 28, daher n — e = 0, also d (n — 1) + 1 = 0 + 1 = 1.

18.

Mutus dedit nomen cocis.

Unter dem Stichwort „Mutus dedit nomen cocis“ ist namentlich der älteren Generation folgendes Spiel bekannt. Man nimmt zehn Paare Karten, z. B. zwei Aß, zwei Könige u. s. f. und läßt von beliebig vielen Personen der Gesellschaft je ein Paar sich merken. Nun legt man die zwanzig Karten in vier Reihen zu je fünf Karten so auf den Tisch, daß jedem Paare einer der zehn Buchstaben m, u, t, s, d, e, i, n, o, c so zugehört, daß die Reihen den obigen Worten mit zwanzig Buchstaben zugeordnet sind. Die Paare liegen nun so in den vier Reihen, daß eine Verwechslung nicht möglich ist. Es enthält nämlich die erste Reihe den Buchstaben u, die erste und zweite t, die erste und dritte m, die erste und vierte s, die zweite d, die zweite und dritte e, die zweite und vierte i, die dritte n, die dritte und vierte o, die vierte c. Damit sind alle Kombinationen erschöpft. Jedes Wort enthält einen Buchstaben doppelt (4 Paare) und je zwei Reihen haben immer einen Buchstaben gemeinsam (6 Paare). Es geht daraus hervor, daß erstens ein Paar und zweitens n — 2 Karten in jeder Reihe liegen müssen (also n im Ganzen), wenn n — 1 Reihen vorhanden sind. Es läßt sich das Spiel nur dann verallgemeinern, wenn die Anzahl der Paare eine Zahl ist, die nach der Formel $\frac{n \times (n-1)}{1 \times 2}$ gebaut ist. Setzen wir für n alle möglichen Werte, soweit sie für das Spiel Sinn haben, so ergiebt sich die Möglichkeit der Auflösung für 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36 . . . Paare. Man kann nun leicht Regeln angeben, nach welchen die Karten, dem angegebenen Prinzip gemäß, gelegt werden müssen, damit die Paare eine eindeutige Lage haben. Ein sehr einfaches Ordnungsgesetz ist folgendes. In der p-ten Reihe

bilden die p-te und letzte Karte ein Paar; außerdem ist die p-te Karte in der q-ten Reihe zugeordnet der q-ten Karte in der p-ten Reihe. Obgleich durchaus nicht erforderlich ist, daß das Spiel mit Karten ausgeführt wird, sondern mit irgend welchen zu Paaren geordneten Gegenständen gespielt werden kann, so wollen wir doch noch einmal der Einfachheit halber ein Spiel von 52 Karten voraussetzen, von denen mit Ausnahme der Könige, Damen und roten Buben alle zu roten und schwarzen Paaren, im ganzen 21, vereinigt sind (Fig. 181). Die römischen Ziffern bezeichnen die roten, die arabischen die schwarzen Karten. Giebt nun Jemand z. B. an, daß seine beiden gemerkten Karten in der zweiten und sechsten wagerechten Reihe liegen, so kann es nur Pique- und Treff-Neun sein. Liegt ein Paar in der vierten und sechsten wagerechten Reihe, so sind es die beiden im Spiel befindlichen Buben und in der zweiten Reihe befindet sich das Paar Coeur- und Carreau-Sechs. Es ist wohl selbstverständlich,

Fig. 181.

I	1	2	3	4	5	I
1	VI	6	7	8	9	VI
2	6	VII	II	III	IX	VII
3	7	II	VIII	V	B	VIII
4	8	III	V	IX	10	IX
5	9	VI	B	10	X	X

Fig. 182.

2	3	31	51	13	17
10	15	8	9	50	12
19	6	1	5	16	11
22	4	7	49	24	6
28	14	37	100	18	15

daß wir die Lage irgend eines Paares mit der jedes anderen vertauschen können, so daß 420 (20 × 21) verschiedene Gruppirungen möglich sind. Um dem Beschauer das Legegesetz zu verhüllen, ist es vorteilhaft, sich etwa beliebig zusammengestellter Zahlenpaare zu bedienen, z. B.:

13	2	15	6	9	1	3	50	5	18	37	100	31	6	51
28	17	12	8	4	11	10	14	7	15	16	24	19	49	22

Die Lage könnte dann etwa so sein, wie Fig. 182 zeigt. So gespielt, wird es in den meisten Fällen schwer sein, den mathematischen Kern dieses Spieles sofort herauszufinden und es kann als Gesellschaftsspiel Freude bereiten.

19.

Umfüllspiele.

Seit mehr als drei Jahrhunderten finden sich in Kalendern, Kinderbüchern und Wochen- oder Tageszeitschriften Aufgaben, bei denen vorausgesetzt ist, daß eine gewisse Anzahl von Gefäßen (meistens drei) bestimmter Größen vorhanden sind. Es wird dann verlangt, daß durch wiederholtes Umfüllen schließlich eine vorgeschriebene Anzahl von Litern in das eine oder andere Gefäß gebracht wird. Das größte derselben ist meistens gefüllt: so auch in den „Problèmes" von Bachet de Méziriac, wo die Aufgabe folgendermaßen lautet: „Zwei Freunde haben beschlossen, sich acht Liter Wein zu teilen und besitzen denselben in einem acht Liter haltenden Gefäße. Wie können sie den Wein in zwei genau gleiche Teile teilen, wenn sie außer dem gefüllten Gefäß noch zwei kleinere leere besitzen, die fünf und drei Liter fassen? Bachet giebt zwei Lösungen, die wir in einer ähnlichen Form geben, wie wir sie früher beim Spiel der Bootsfahrten (S. 233) auch angewendet haben:

Liter		1	2	3	4	5	6	7
I. (8)	**8**	3	3	6	6	1	1	4
II. (5)	0	**5**	2	2	**0**	**5**	4	4
III. (3)	0	0	**3**	**0**	2	2	**3**	**0**

Der Zweck ist beim siebenten Umgießen erreicht.

Eine Umfüllung mehr erfordert die andere Lösung:

Liter		1	2	3	4	5	6	7	8
I. (8)	8	5	5	2	2	7	7	4	4
II. (5)	0	0	3	3	**5**	**0**	1	1	4
III. (3)	0	**3**	**0**	**3**	1	1	0	**2**	**0**

Da bei jedem Umfüllen entweder eins der Gefäße in ein anderes entleert oder durch ein anderes gefüllt wird, so muß, wie das auch aus den beiden Lösungen hervorgeht, eines der Gefäße entweder ganz voll oder ganz leer sein.

Man kann nun einen ganzen Cyklus von Umfüllungen bilden, der mit demselben Füllungszustande wieder schließt, mit dem man begonnen hat und der unter gewissen Bedingungen sämmtliche Zahlen von der Null an bis zur höchsten Zahl enthält. In diesem Cyklus würde dann ja die Lösung jeder Aufgabe enthalten sein, bei welcher verlangt wird, die vorhandene Literzahl in irgend zwei ganzzahlige Summanden zu zerlegen. Die Regel, nach welcher sich dieser Cyklus ganz von selber ergiebt, läßt sich folgendermaßen ausdrücken: Man fülle aus den größten Gefäß in das kleinste, aus diesem in das mittlere, wiederhole diesen Vorgang so oft, bis das mittlere gefüllt ist, entleere dieses wieder in das erste und beginne wieder von vorn, bis der ursprügliche Zustand wiederkehrt. Kürzer, wenn auch weniger deutlich, lautet dieselbe Vorschrift: Fülle mittelst des kleinsten das mittlere, entleere dieses in das größte und wiederhole diesen Vorgang, bis der Cyklus beendet ist. Z. B.:

Liter		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
A (15)	15	8	8	1	1	9	9	2	2	10	10	3	3	11	11
B (8)	0	0	7	7	8	0	6	6	8	0	5	5	8	0	4
C (7)	0	7	0	7	6	6	0	7	5	5	0	7	4	4	0

Liter	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
A (15)	4	4	12	12	5	5	13	13	6	6	14	14	7	7	15
B (8)	4	8	0	3	3	8	0	2	2	8	0	1	1	8	0
C (9)	7	3	3	0	7	2	2	0	7	1	1	0	7	0	0

Der ganze Cyklus enthält 29 Umfüllungen. Je zwei benachbarte Reihen haben eine Zahl gemeinsam. Bei jeder vierten Umfüllung ist das mittlere Gefäß wieder gefüllt und der Turnus beginnt von Neuem. Denkt man sich den Cyklus rückwärts erhalten, so lautet die Regel offenbar folgendermaßen: Man fülle das mittlere, mit diesem das kleinste, entleere dieses in das größte,

gieße den im zweiten befindlichen Rest in das kleinste und beginne von vorn, bis der Cyklus beendet ist. Z. B.:

Liter		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
A (10)	10	3	3	7	7	0	0	4	4	8	8	1	1	5	5	9	9	2	2	6	6	10
B (7)	0	7	3	3	0	7	6	6	0	2	0	7	5	5	1	1	0	7	4	4	0	0
C (4)	0	0	4	0	3	3	4	0	6	0	2	2	4	0	4	0	1	1	4	0	4	0

Wir haben durch die oben angewendete Methode eine Erweiterung der ursprünglichen Aufgabe in der Richtung erreicht, daß nicht nur die Halbirung der gegebenen Literzahl, sondern irgend eine Zerlegung in einen zweigliedrigen Ausdruck erreicht wird. In den obigen Beispielen erreichten wir auch thatsächlich alle möglichen Kombinationen der Summation. In den beiden folgenden Beispielen ist das jedoch nicht mehr der Fall:

Liter		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A (16)	16	9	9	2	2	14	14	7	7	0	0	12	12	5	5	16
B (12)	0	0	7	7	12	0	2	2	9	9	12	0	4	4	11	0
C (7)	0	7	0	7	2	2	0	7	0	7	4	4	0	7	0	0

Hier fehlen die Kombinationen 1 und 15, 3 und 13, 6 und 10 und 8 und 8. Während früher in der mittleren Reihe alle Zahlen vorkommen, von 0 an bis zur vollen Literzahl, sind hier außer 0 und 12 nur die Zahlen 2, 4, 7, 9, 11. Bei näherem Eingehen auf die vorgeschriebene Methode ergiebt sich, daß in der mittleren Reihe außer 0 und der höchsten Zahl b sämmtliche Vielfache der kleinsten Zahl c vorkommen müssen, welche, falls sie größer, als die höchste Zahl b sind, um diese oder ihr Vielfaches vermindert werden müssen. So kamen in dem vorletzten Beispiel: 4, (8—7 =) 1, (12—7 =) 5, (16—14 =) 2, 20—14=) 6 vor, also alle Zahlen von 0 bis 7. In dem letzten Beispiel dagegen finden wir außer den Grenzzahlen 0 und 12 noch 7, (14—12 =) 2, 21—12 = 9, 28—24 = 4, (35—24 =) 11. Es fehlen demnach die Zahlen 1, 3, 6, 8, 10, 13, 15, wie auch die obige Zusammenstellung der Paare bereits ergiebt Der Grund dafür ist darin zu suchen, daß hier a kleiner ist als die um 1 verminderte Summe der beiden anderen Zahlen. Die oben angegebene Methode erfordert nämlich, daß das kleine Gefäß C stets aus A wieder gefüllt werden kann. Nun enthält A aber

dann am wenigsten Liter, wenn B ganz voll ist. Dann muß ja aber stets B in A entleert werden. Wenn aber B nicht aus C ganz gefüllt werden konnte, sondern nur bis (b—1), so sind dann in A noch [a—(b—1)] Liter. Dies ist der kleinste Wert, den A haben kann in dem Augenblick, wo C noch aus A gefüllt werden muß. Damit sich C also wieder füllen läßt, muß $a-(b-1)>c$ sein oder $a>b+c-1$, wenn man alle jene Vielfachen von c in der Reihe für B haben will. In dem letzten Beispiel enthält zuletzt B 11 Liter und A hat demnach nur noch 5 Liter, also nicht mehr genügend, um C zu füllen. Daher erreicht der Cyklus hier sein Ende. Hätte a zwei Liter mehr gehabt, also 18 statt 16, so wären 7 Liter darin gewesen, als in B 11 waren und der Cyklus hätte sich folgendermaßen weiter gestaltet:

Liter	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
A (18)	7	0	0	12	12	5	5	17	17	10	10	3	3	15	15	8	8	18
B (12)	11	11	12	0	6	6	12	0	1	1	8	8	12	0	3	3	10	0
C (7)	0	7	6	6	0	7	1	1	0	7	0	7	3	3	0	7	0	0

Hierin kommen nun in der Reihe B ferner vor:

$$(42-36=)\,6,\ (49-48=)\,1,\ (56-48=)\,8,\ (63-60=)\,3,\ (70-60=10,$$

so daß dann sämmtliche Zahlen von 0 bis 12 in der Reihe B vorkommen würden. Es liefert also unsere Methode unter der Bedingung $a\geqq(b+c-1)$ in der Reihe B außer den Grenzzahlen sämmtliche dazwischenliegende Zahlen in der Reihenfolge der Vielfachen von c vermindert um entsprechende Vielfache von b, soweit diese Differenzen unterhalb der Grenze b liegen.

Die Forderung nun, daß die zwischen a und b liegenden Zahlen auch in dem Cyklus sämmtlich vorkommen, ist ebenfalls an eine Bedingung geknüpft. Die Zahl a hat nämlich and eine obere Grenze. Betrachten wir z. B. folgendes Schema:

A (50)	50	48	48	46	46	44	44	42	42	40	40	49	49	47	47	45	45	43	43	41	41	50
B (9)	0	0	2	2	4	4	6	6	8	8	9	0	1	1	3	3	5	5	7	7	9	0
C (2)	0	2	0	2	0	2	0	2	0	2	1	1	0	2	0	2	0	2	0	2	0	0

Hier sind zwar in der zweiten Reihe sämmtliche Ziffern von 0 bis 9 vorhanden, in der ersten Reihe können jedoch selbstverständlich sämmtliche Zahlen unter 40 nicht stehen. Allerdings könnte

noch die Zahl 39 erreicht werden, wenn man B und C beide füllte. Kleinere Zahlen können aber naturgemäß nicht erreicht werden. Da nun die größte in B vorkommende Zahl b selber ist, so müßte die kleinste Zahl in $A \leqq b + 1$ sein, damit alle Zahlen im Cyklus vorkommen. Thatsächlich ist aber $a - (b + c)$ die kleinste erreichbare Zahl. Es müßte also schon

$$a - (b + c) \leqq b + 1 \text{ oder } a \leqq 2b + c + 1$$

sein. Die beiden Bedingungen dafür, daß in dem Cyklus sämmtliche zweigliedrige Kombinationen der Zahl a vorkommen ist demnach

$$b + c - 1 \leqq a < 2b + c + 1.$$

Es mag noch bemerkt werden, daß die zweite Methode nur dann eine genaue Umkehrung der ersten darstellt, wenn diese Bedingungen erfüllt sind. Denn es kann vorkommen, daß in A nicht genug Flüssigkeit ist, um der zweiten Methode gemäß B zu füllen. Fährt man dann, ohne a ganz zu füllen, weiter fort, so bleiben auch bei dieser Methode dieselben Zahlen ausgeschlossen, wie bei der vorigen. In der That liefert die zweite Methode auf den Fall A = 16, B = 12, C = 7 angewendet (siehe oben):

Liter		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A (16)	16	4	4	11	11	0	0	7	7	14	14	2	2	9	9	16
B (12)	0	12	5	5	0	11	9	9	2	2	0	12	7	7	0	0
C (7)	0	0	7	0	5	5	7	0	7	0	2	2	7	0	7	0

Der Fall, wo B nicht ganz aus A gefüllt werden kann, ist hervorgehoben worden. Es fehlen dieselben Ziffern in der Reihe B, wie bei der obigen Methode 1, 3, 6, 8, 10, 13, 15.

In dem folgenden kleinen Gedicht, welches sich am 21. März 1897 in der Unterhaltungsbeilage der „Deutschen Zeitung“ fand, hat eine Umfüllungsaufgabe poetische Einkleidung erhalten:

Vor dem Gärtchen sitzt der Winzer,
Neben sich den vollen Weinkrug.
Zwei Scholaren ziehn des Weges.
Lustig sonst die kecken Knaben
Ließen jetzt die Köpfe hangen.
Hatten längst des goldnen Weines
Nichts verspürt in ihren Kehlen.
Hatten lang den Staub der Straße
Und der Sonne Glut ertragen.

Grüßten fein den dicken Winzer,
Fragten, ob der Wein geraten.
Ei, ihr Herrn! So sprach der Winzer,
Der als lustger Schalk bekannt war, —
Kommt mit mir und prüfet selber.
Und er führt sie in den Keller
In den kühlen, dufterfüllten,
Wo die dickgebauchten Fässer
Lockend an den Wänden lagen.

Dies Gefäß will ich euch füllen,
Sechszehn Maß enthält genau es.
Euer seis, wenn ihrs euch teilen
Könnt, daß jeder hat die Hälfte.
Zwar hab ich nur zwei Gefäße
Noch, mit denen ihr könnt messen.

Eins von neun und eins von sieben
Maß, doch wirds euch wohl gelingen.—
Obs gelang? Wie kann man fragen!
Ein Scholar löst jedes Rätsel,
Wird ihm Wein als Preis verheißen.
Doch wer sagt mir, wie sies machten?

Die drei Gefäße enthalten 16, 9 und 7 Liter. Es sollen die sechszehn im größten Gefäße befindlichen Liter durch Umfüllen in zwei gleiche Teile verteilt werden, so daß jedem der beiden Scholaren acht Liter Wein zufallen. Es ist

$$b + c - 1 = 9 + 7 - 1 = 15$$
$$2b + c + 1 = 18 + 9 + 1 = 28$$

und da $a = 16$ zwischen 15 und 28, liegt, so führt unsere Methode auf alle Fälle zum Ziel. Hier ist die Lösung:

A (16)	16	9	9	2	2	11	11	4	4	13	13	6	6	15	15	8	8
B (9)	0	0	7	7	9	0	5	5	9	0	3	3	9	0	1	1	8
C (7)	0	7	0	7	5	5	0	7	3	3	0	7	1	1	0	7	0

Die Aufgabe ist nach sechszehn Umfüllungen gelöst.

Schubert war der erste, welcher für beliebige Zahlen a, b, c diese Cyklenmethode angegeben hat, bei denen alle Zahlen von 1 bis a unter gewissen Bedingungen erreicht werden können. Wir bemerken jedoch, daß man sich nicht auf drei Gefäße zu beschränken braucht. Es finden sich in einigen Büchern, welche Zahlenbelustigungen enthalten, Dritteilungen einer gewissen Menge, wenn vier Gefäße vorhanden sind. Ein Beispiel dafür möge hier folgen:

Liter		1	2	3	4	5	6	7	8	9
A (24)	24	13	8	0	11	16	16	3	3	8
B (13)	0	0	0	8	8	8	0	13	8	8
C (11)	0	11	11	11	0	0	8	8	8	8
D (5)	0	0	5	5	5	0	0	0	5	0

Bei der neunten Umfüllung ist die Dritteilung erreicht.

Anleitung
zum Gebrauch des immerwährenden Kalenders.

Man suche in der ersten Kolonne das betreffende Datum, wähle aus den Kolonnen 2 bis 8 den Monat und folge dem in Höhe des Datums beginnenden Striche bis zum Ende der betr. Kolonne. Darauf wähle man unter Berücksichtigung des gebräuchlichen Kalenders (Gregorianisch oder Julianisch) aus den Kolonnen 9 bis 15 das Jahrhundert (das laufende ist durch 18 bezeichnet) und folge wieder, in gleicher Höhe wie die Monatslinie endete, beginnend, dem betreffenden Strich. Schließlich suche man aus den Kolonnen 16 bis 22 die Jahreszahl und folge in derselben Weise wie vorhin dem Strich bis ans Ende. Dann giebt die Kolonne 23 den Wochentag in der Höhe, wo man sich befindet.

Beispiel. (Seite 102 ff.)

28. August 1749 (Goethe's Geburtstag).

Datum: 28: unterste wagerechte Reihe.

Monat: August: vierte senkrechte Reihe; die Linie führt hinauf bis an die zweite wagerechte Reihe.

Jahrhundert: (Gregorianisch) 17: neunte senkrechte Reihe. Der Strich führt von der zweiten wagerechten Reihe hinunter bis zur untersten.

Jahr: 49: in der zwanzigsten senkrechten Reihe. Der Strich führt von der untersten wagerechten Reihe bis zur dritten von unten, welche an ihrem Ende den Donnerstag als Tag angiebt.

Anmerkung: Jede Bestimmung erfordert in drei senkrechten Reihen (Monat, Jahrhundert, Jahr) die Verfolgung des in der betreffenden Höhe beginnenden Striches.

Druck von J. B. Hirschfeld in Leipzig.

Fig. 150 (zu Seite 193)

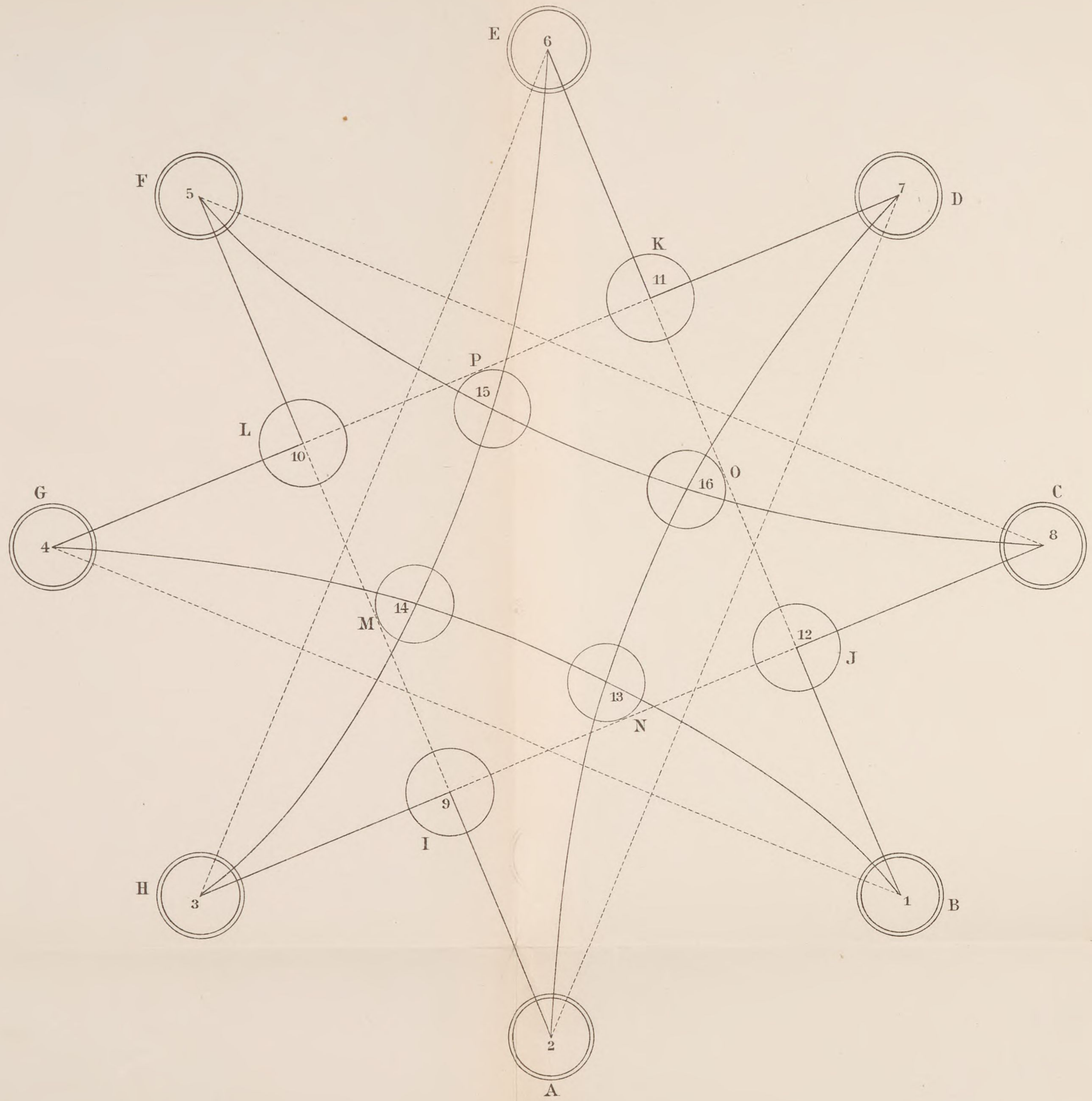
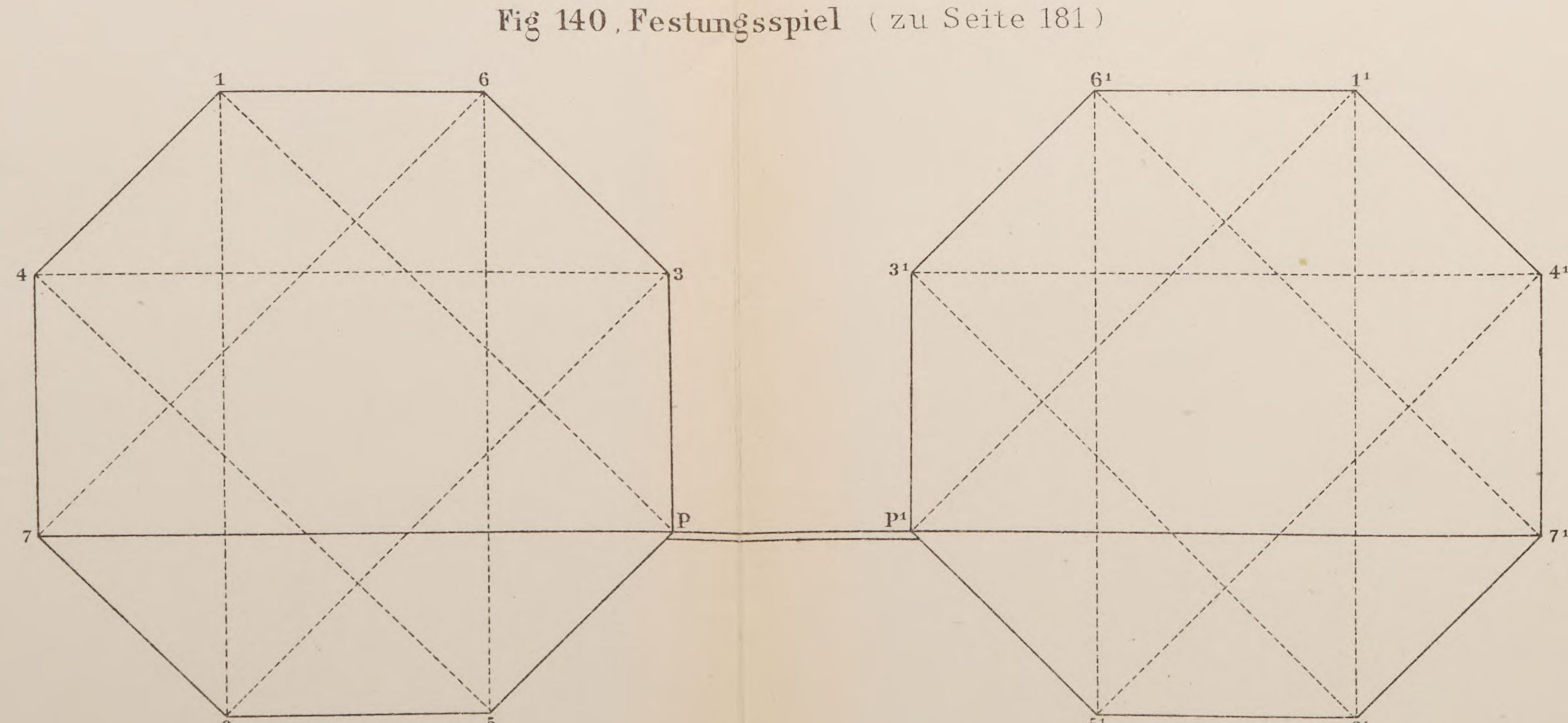
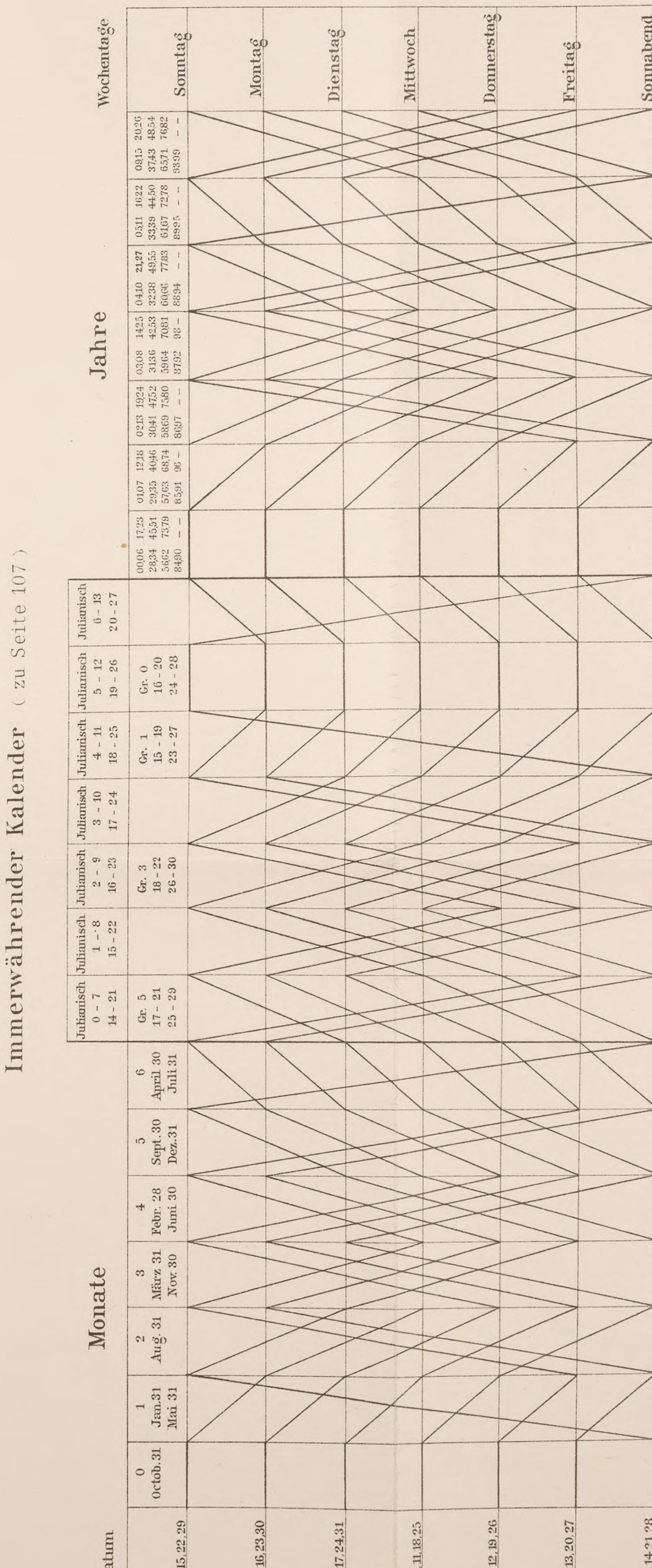


Fig 140. Festungsspiel (zu Seite 181)



Immerwährender Kalender (zu Seite 107)



Druck von J. B. Hirschfeld in Leipzig.